



ПРИЛОЖЕНИЕ К ЖУРНАЛУ

# КВАНТ

№5-6/2014



**ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЕ  
МАТЕРИАЛЫ  
2014 ГОДА**

Приложение к журналу

**«КВАНТ»**

*№5-6/2014*

---

**ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЕ  
МАТЕРИАЛЫ  
ПО МАТЕМАТИКЕ И ФИЗИКЕ  
2014 ГОДА**

**Составители**

**С.А.Дориченко, А.А.Егоров,**

**В.А.Тихомирова**

**Москва**

**Издательство МЦНМО**

**2014**

УДК 373.167.1:[51+53]  
ББК 22.1я721+22.3я721  
Э36

Приложение  
к журналу «Квант»  
№5-6/2014

**Э36 Экзаменационные материалы по математике и физике 2014 года** / Составители С.А.Дориченко, А.А.Егоров, В.А.Тихомирова. – М.: Издательство МЦНМО, 2014. – 272 с. (Приложение к журналу «Квант» №5-6/2014.)

ISBN 978-5-4439-0624-9

В книгу включены варианты единого государственного экзамена (ЕГЭ) по физике, задачи олимпиад и вступительных экзаменов по математике и физике в различные вузы страны в 2014 году.

Книга адресована выпускникам средних школ, лицеев и гимназий, слушателям подготовительных отделений и курсов, а также всем тем, кто самостоятельно готовится к поступлению в вуз.

ISBN 978-5-4439-0624-9

ББК 22.1я721+22.3я721



9 785443 906249 >



# СОДЕРЖАНИЕ

---

|   |        |        |
|---|--------|--------|
| Предисловие   |        | 4      |
|   | Задачи | Ответы |
| Единый государственный экзамен по физике                              | 5      | 134    |
| Межрегиональная олимпиада «Высшая проба»                              | 40     | 142    |
| Олимпиада «Ломоносов-2014»  | 53     | 157    |
| Олимпиада «Покори Воробьевы горы»                                     | 67     | 181    |
| Институт криптографии, связи и информатики Академии ФСБ России        | 75     | 200    |
| Московский государственный технический университет имени Н.Э.Баумана  | 84     | 214    |
| Московский физико-технический институт (государственный университет)  | 94     | 233    |
| Национальный исследовательский университет «МИЭТ»                     | 100    | 245    |
| Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ»             | 104    | 246    |
| Новосибирский государственный университет                             | 107    | 255    |
| Российский государственный университет нефти и газа имени И.М.Губкина | 115    | 269    |
| Санкт-Петербургский государственный политехнический университет       | 121    | 270    |

## ПРЕДИСЛОВИЕ

---

В этом приложении к журналу «Квант» традиционно собраны материалы вступительных испытаний по математике и физике в вузы нашей страны за прошедший 2014 год.

Мы предлагаем школьникам и учителям как избранные варианты единого государственного экзамена (ЕГЭ), так и задачи различных олимпиад, имеющих статус «вступительных». Победители и призеры таких олимпиад, включенных в федеральный список данного года, имеют право быть приравненными к лицам, набравшим максимальное количество баллов по единому государственному экзамену по конкретному предмету, при поступлении в любой вуз. (Отметим, что это не освобождает учащихся от сдачи ЕГЭ.) Кроме того, в сборнике представлены материалы вступительных испытаний в традиционной форме, в которых, в частности, могут участвовать абитуриенты, по каким-либо причинам освобожденные от сдачи ЕГЭ.

Мы надеемся, что предлагаемые вниманию читателей материалы будут полезны как для самостоятельной подготовки к экзаменам, так и для использования на уроках, факультативах, кружках и подготовительных курсах.

Желаем успехов!

## **ЕДИНЫЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ЭКЗАМЕН ПО ФИЗИКЕ**

В 2014 году ЕГЭ по физике проводился по тем же правилам, что и в 2013 году. Соответственно, и структура вариантов по физике сохранялась практически такой же. Мы, как обычно, приводим два варианта открытого сегмента ЕГЭ по физике 2014 года, первый – со всеми дополнительными материалами и указаниями, второй – только с условиями заданий и задач.

По решению Министерства образования и разработчиков ЕГЭ по физике в структуру вариантов 2015 года внесены существенные изменения. Упразднено деление на группы А, В, С – нумерация заданий сплошная, от 1 до 32. Первая часть (1 – 24) содержит 9 заданий с выбором номера ответа (один первичный балл за задание), 8 заданий на установление соответствия с выбором двух номеров ответа (максимум 2 первичных балла за задание) и 7 заданий с кратким ответом (1 первичный балл за задание). Вторая часть содержит 3 задачи с кратким ответом (1 первичный балл за задание) и 5 задач с развернутым ответом (максимум 3 первичных балла за задание). Для знакомства читателей со структурой нового варианта мы приводим один из тренировочных материалов, подготовленных группой разработчиков ЕГЭ по физике. Обратите внимание на непривычное задание 24 (с кратким ответом), где надо в любом порядке указать номера двух правильных утверждений из пяти.

### **ЕГЭ 2014 ГОДА**

#### *Вариант 1*

#### **Инструкция по выполнению работы**

Для выполнения экзаменационной работы по физике отводится 235 минут. Работа состоит из 3 частей, включающих в себя 35 заданий.

Часть 1 содержит 21 задание (А1–А21). К каждому заданию дается четыре варианта ответа, из которых только один правильный.

Часть 2 содержит 4 задания (В1–В4), на которые надо дать краткий ответ в виде последовательности цифр.

Часть 3 содержит 10 задач: А22–А25 с выбором одного верного ответа и С1–С6, для которых требуется дать развернутые решения.

При вычислениях разрешается использовать непрограммируемый калькулятор.

Все бланки ЕГЭ заполняются яркими черными чернилами. Допускается использование гелевой, капиллярной или перьевой ручек.

При выполнении заданий Вы можете пользоваться черновиком. Обращаем Ваше внимание на то, что записи в черновике не будут учитываться при оценивании работы.

Советуем выполнять задания в том порядке, в котором они даны. Для экономии времени пропускайте задание, которое не удастся выполнить сразу, и переходите к следующему. Если после выполнения всей работы у Вас останется время, Вы сможете вернуться к пропущенным заданиям.

Баллы, полученные Вами за выполненные задания, суммируются. Постарайтесь выполнить как можно больше заданий и набрать наибольшее количество баллов.

Ниже приведены справочные данные, которые могут понадобиться Вам при выполнении работы.

### **Десятичные приставки**

| Наименование | Обозначение | Множитель | Наименование | Обозначение | Множитель  |
|--------------|-------------|-----------|--------------|-------------|------------|
| гига         | Г           | $10^9$    | санти        | с           | $10^{-2}$  |
| мега         | М           | $10^6$    | милли        | м           | $10^{-3}$  |
| кило         | к           | $10^3$    | микро        | мк          | $10^{-6}$  |
| гекто        | г           | $10^2$    | нано         | н           | $10^{-9}$  |
| деци         | д           | $10^{-1}$ | пико         | п           | $10^{-12}$ |

### **Константы**

число «пи»

$$\pi = 3,14$$

ускорение свободного падения

на Земле

$$g = 10 \text{ м/с}^2$$

гравитационная постоянная

$$G = 6,7 \cdot 10^{-11} \text{ Н} \cdot \text{м}^2/\text{кг}^2$$

универсальная газовая постоянная

$$R = 8,31 \text{ Дж}/(\text{моль} \cdot \text{К})$$

постоянная Больцмана

$$k = 1,38 \cdot 10^{-23} \text{ Дж/К}$$

постоянная Авогадро

$$N_A = 6 \cdot 10^{23} \text{ моль}^{-1}$$

скорость света в вакууме

$$c = 3 \cdot 10^8 \text{ м/с}$$

коэффициент пропорциональности

в законе Кулона

$$k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 9 \cdot 10^9 \text{ Н} \cdot \text{м}^2 / \text{Кл}^2$$

модуль заряда электрона (элементарный электрический заряд)

$$e = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ Кл}$$

постоянная Планка

$$h = 6,6 \cdot 10^{-34} \text{ Дж} \cdot \text{с}$$

### **Соотношение между различными единицами**

температура

$$0 \text{ К} = - 273 \text{ }^\circ\text{С}$$

атомная единица массы

$$1 \text{ а.е.м.} = 1,66 \cdot 10^{-27} \text{ кг}$$

1 атомная единица массы эквивалентна

$$931,5 \text{ МэВ}$$

1 электронвольт

$$1 \text{ эВ} = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ Дж}$$

### **Масса частиц**

электрона

$$9,1 \cdot 10^{-31} \text{ кг} \approx 5,5 \cdot 10^{-4} \text{ а.е.м.}$$

протона

$$1,673 \cdot 10^{-27} \text{ кг} \approx 1,007 \text{ а.е.м.}$$

нейтрона

$$1,675 \cdot 10^{-27} \text{ кг} \approx 1,008 \text{ а.е.м.}$$

### **Плотность**

воды 1000 кг/м<sup>3</sup> подсолнечного

древесины масла 900 кг/м<sup>3</sup>

(сосна) 400 кг/м<sup>3</sup> алюминия 2700 кг/м<sup>3</sup>

керосина 800 кг/м<sup>3</sup> железа 7800 кг/м<sup>3</sup>

ртути 13600 кг/м<sup>3</sup>

### **Удельная теплоемкость**

воды 4,2 · 10<sup>3</sup> Дж/(кг · К) алюминия 900 Дж/(кг · К)

льда 2,1 · 10<sup>3</sup> Дж/(кг · К) меди 380 Дж/(кг · К)

железа 460 Дж/(кг · К) чугуна 500 Дж/(кг · К)

свинца 130 Дж/(кг · К)

### **Удельная теплота**

парообразования воды 2,3 · 10<sup>6</sup> Дж/кг

плавления свинца 2,5 · 10<sup>4</sup> Дж/кг

плавления льда 3,3 · 10<sup>5</sup> Дж/кг

**Нормальные условия:** давление 10<sup>5</sup> Па, температура 0 °С



### Молярная масса

|          |                            |             |                            |
|----------|----------------------------|-------------|----------------------------|
| азота    | $28 \cdot 10^{-3}$ кг/моль | кислорода   | $32 \cdot 10^{-3}$ кг/моль |
| аргона   | $40 \cdot 10^{-3}$ кг/моль | лития       | $6 \cdot 10^{-3}$ кг/моль  |
| водорода | $2 \cdot 10^{-3}$ кг/моль  | неона       | $20 \cdot 10^{-3}$ кг/моль |
| воды     | $18 \cdot 10^{-3}$ кг/моль | углекислого |                            |
| воздуха  | $29 \cdot 10^{-3}$ кг/моль | газа        | $44 \cdot 10^{-3}$ кг/моль |
| гелия    | $4 \cdot 10^{-3}$ кг/моль  |             |                            |

### Часть 1

**При выполнении заданий части 1 в бланке ответов №1 под номером выполняемого Вами задания (A1–A21) поставьте знак «х» в клеточке, номер которой соответствует номеру выбранного Вами ответа.**

**A1.** На рисунке 1 представлен график зависимости координаты  $x$  велосипедиста от времени  $t$ . На каком интервале времени проекция скорости велосипедиста на ось  $x$  равна  $v_x = -10$  м/с?

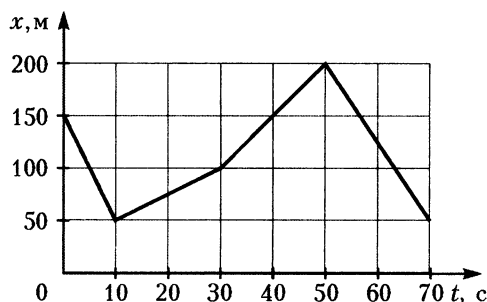


Рис. 1

- 1) От 0 до 10 с;
- 2) от 50 до 70 с;
- 3) от 10 до 30 с;
- 4) от 30 до 50 с.

**A2.** Верхнюю точку моста радиусом 100 м автомобиль проходит со скоростью 20 м/с. Центробежное ускорение автомобиля равно:

- 1)  $1 \text{ м/с}^2$ ; 2)  $2 \text{ м/с}^2$ ; 3)  $3 \text{ м/с}^2$ ; 4)  $4 \text{ м/с}^2$ .

**A3.** Тело массой  $m$  висит на пружине жесткостью  $k$ . Если на пружину вдвое большей жесткости подвесить тело с вдвое большей массой, то деформация второй пружины будет:

- 1) в 4 раза больше, чем у первой пружины;
- 2) в 4 раза меньше, чем у первой пружины;
- 3) такой же, как у первой пружины;
- 4) в 2 раза меньше, чем у первой пружины.

**A4.** Одинаковые шары движутся с одинаковыми по модулю скоростями в направлениях, указанных стрелками на рисунке 2, и абсолютно неупруго соударяются. Как будет направлен импульс шаров после их столкновения?

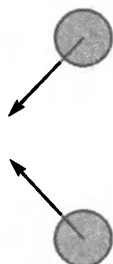


Рис. 2

- 1) ↙ ; 2) ← ; 3) ↓ ; 4) ↘ .

**A5.** Два груза одинаковой массы подняли в вернюю точку гладкой наклонной плоскости: один груз – втаскивая наверх вдоль наклонной плоскости, а другой – поднимая вертикально. При этом модуль работы против силы тяжести, действующей на грузы:

- 1) зависит от угла наклона плоскости;
- 2) больше при подъеме груза вдоль наклонной плоскости;
- 3) одинаковый для обоих грузов;
- 4) больше при подъеме груза вертикально вверх.

**A6.** Как надо изменить массу груза пружинного маятника, чтобы увеличить период его колебаний в 2 раза?

- 1) Уменьшить в 2 раза;
- 2) увеличить в 2 раза;
- 3) увеличить в 4 раза;
- 4) уменьшить в 4 раза.

**A7.** Если толченый мел размешать в воде, то частицы мела будут долго «висеть» в толще воды, не оседая на дно. Это явление объясняется тем, что:

- 1) вода выталкивает их вверх согласно закону Архимеда;
- 2) частицы мела совершают броуновское движение в воде;
- 3) Земля не притягивает столь мелкие частицы;
- 4) температура частиц мела выше температуры воды.

**A8.** В сосуде находится некоторое количество идеального газа. Как изменится температура газа, если он перейдет из состояния 1 в состояние 2 (рис.3)?

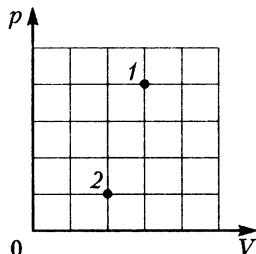


Рис. 3

- 1)  $T_2 = 6T_1$  ; 2)  $T_2 = T_1$  ; 3)  $T_2 = \frac{1}{3}T_1$  ; 4)  $T_2 = \frac{1}{6}T_1$  .

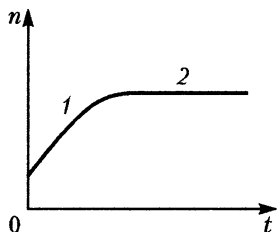


Рис. 4

**A9.** В стеклянную колбу налили немного воды и закрыли ее пробкой. Вода постепенно испарялась. На рисунке 4 показан график изменения со временем концентрации  $n$  молекул водяного пара внутри колбы. Температура в колбе в течение всего времени проведения опыта оставалась постоянной. В конце опыта в колбе еще оставалась вода. Какое утверждение можно считать правильным?

- 1) На участке 1 пар ненасыщенный, а на участке 2 насыщенный;
- 2) на участке 1 пар насыщенный, а на участке 2 ненасыщенный;
- 3) на обоих участках пар насыщенный;
- 4) на обоих участках пар ненасыщенный.

**A10.** Воспользовавшись справочными таблицами, приведенными выше, определите, каково должно быть примерное отношение масс  $\frac{m_{\text{Fe}}}{m_{\text{Al}}}$  железного и алюминиевого тел, чтобы при получении одного и того же количества теплоты они нагрелись на одно и то же число градусов.

- 1) 1; 2) 2; 3) 0,5; 4) 1,5.

**A11.** В однородном электрическом поле, вектор напряженности которого направлен горизонтально, на шелковых нитях одинаковой длины подвешены два шарика, заряды которых одинаковы. Масса первого шарика больше массы второго. Какое из утверждений правильно?

- 1) Угол отклонения нити первого шарика меньше угла отклонения второго;
- 2) шарики не отклоняются от вертикали;

3) углы отклонения нитей шариков одинаковы;

4) угол отклонения нити первого шарика больше угла отклонения второго.

**A12.** По проводнику течет постоянный электрический ток. Величина заряда, проходящего через проводник, возрастает с течением времени согласно графику (рис.5). Сила тока в проводнике равна:

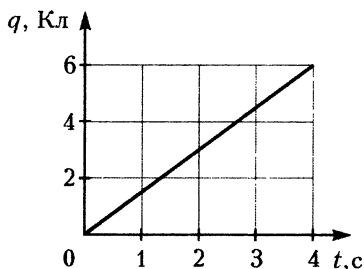


Рис. 5

- 1) 12 А; 2) 24 А; 3) 6 А; 4) 1,5 А.

**A13.** Два параллельных длинных проводника с токами  $I_1$  и  $I_2$  расположены перпендикулярно плоскости чертежа (рис.6). Векторы  $\vec{B}_1$  и  $\vec{B}_2$  индукции магнитных полей, создаваемых этими проводниками в точке А, направлены в плоскости чертежа следующим образом:

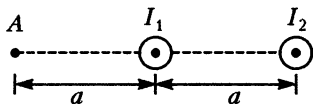


Рис. 6

- 1)  $\vec{B}_1$  – вниз,  $\vec{B}_2$  – вверх;
- 2)  $\vec{B}_1$  – вниз,  $\vec{B}_2$  – вниз;
- 3)  $\vec{B}_1$  – вверх,  $\vec{B}_2$  – вниз;
- 4)  $\vec{B}_1$  – вверх,  $\vec{B}_2$  – вверх.

**A14.** Линии индукции однородного магнитного поля пронизывают рамку площадью  $0,5 \text{ м}^2$  под углом  $30^\circ$  к ее поверхности, создавая магнитный поток, равный  $0,2 \text{ Вб}$ . Чему равен модуль вектора индукции магнитного поля?

- 1) 0,16 Тл; 2) 0,8 Тл; 3) 0,2 Тл; 4) 0,4 Тл.

**A15.** Ученик выполнил задание: «Нарисовать ход луча, падающего из воздуха перпендикулярно поверхности стеклянной призмы треугольного сечения» (рис.7).

При построении он:

- 1) правильно изобразил ход луча на обеих границах сред;
- 2) ошибся при изображении хода луча только при переходе из воздуха в стекло;
- 3) ошибся при изображении хода луча только при переходе из стекла в воздух;
- 4) ошибся при изображении хода луча на обеих границах сред.

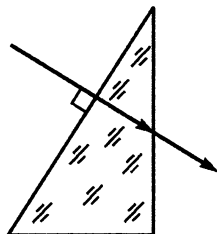


Рис. 7

**A16.** При освещении одной и той же дифракционной решетки монохроматическим светом на экране, установленном за ней, возникает дифракционная картина, состоящая из светлых линий на темном фоне. В первом опыте расстояние между светлыми линиями оказалось больше, чем во втором, а во втором – больше, чем в третьем. В каком случае правильно указана возможная последовательность цветов монохроматического света, которым освещалась решетка?

- 1) 1 – красный, 2) 1 – синий, 3) 1 – зеленый, 4) 1 – красный,  
 2 – зеленый, 2 – зеленый, 2 – синий, 2 – синий,  
 3 – синий; 3 – красный; 3 – красный; 3 – зеленый.

**A17.** На рисунке 8 представлен фрагмент Периодической системы элементов Д.И. Менделеева. Укажите число электронов в атоме бора В.

|   | I   | II   | III   |
|---|---|--|---|
| 1 | 1<br><b>H</b><br>1,00797<br>Водород           |  |   |
| 2 | 3<br><b>Li</b><br>6,939<br>Литий<br>1 2       | 4<br><b>Be</b><br>9,0122<br>Бериллий<br>2 2  | 5<br><b>B</b><br>10,811<br>Бор<br>3 2           |
| 3 | 11<br><b>Na</b><br>22,9898<br>1 8 2<br>Натрий | 12<br><b>Mg</b><br>24,312<br>2 8 2<br>Магний | 13<br><b>Al</b><br>26,9815<br>3 8 2<br>Алюминий |

Рис. 8

1) 10; 2) 2; 3) 3; 4) 5.

**A18.** В таблице приведены значения энергии для второго и четвертого энергетических уровней атома водорода. Какой дол-

| Номер уровня | Энергия, $10^{-19}$ Дж |
|--------------|------------------------|
| 2            | -5,45                  |
| 4            | -1,36                  |

жна быть энергия фотона, при поглощении которого атом переходит со второго уровня на четвертый?

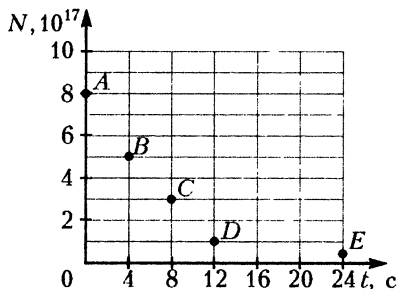


Рис. 9

- 1)  $4,09 \cdot 10^{-19}$  Дж;
- 2)  $1,36 \cdot 10^{-19}$  Дж;
- 3)  $5,45 \cdot 10^{-19}$  Дж;
- 4)  $6,81 \cdot 10^{-19}$  Дж.

**A19.** Ядра радона  $^{219}_{86}\text{Rn}$  испытывают  $\alpha$ -распад с периодом полураспада 4 с. В момент начала наблюдения в

образце содержится  $8 \cdot 10^{17}$  ядер радона. Через какую из точек, кроме точки А (рис.9), пройдет график зависимости от времени числа ядер радиоактивного радона в образце?

1) С; 2) В; 3) D; 4) E.

**A20.** Различные проволоки изготовлены из одного и того же материала. Какую пару проволок нужно выбрать, чтобы на опыте проверить зависимость сопротивления проволоки от ее длины (рис.10)?

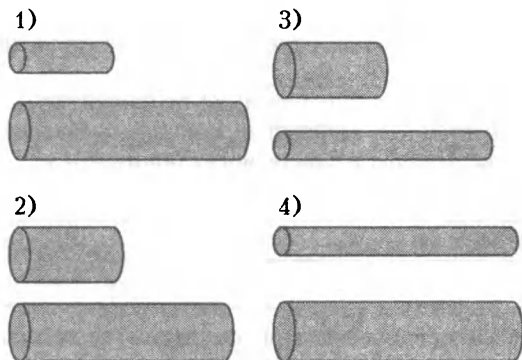


Рис. 10

**A21.** На графике (рис.11) представлены результаты измерения длины пружины при различных значениях массы грузов, лежащих в чашке пружинных весов. С учетом погрешностей измерений ( $\Delta m = \pm 1$  г;  $\Delta l = \pm 0,2$  см) найдите массу груза на чашке

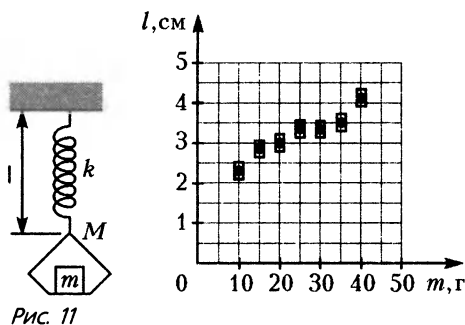


Рис. 11

весов, при которой длина пружины равна 4,5 см.

1) 30 г; 2) 80 г; 3) 65 г; 4) 50 г.

## Часть 2

**Ответом к заданиям этой части (В1–В4) является последовательность цифр. Впишите ответы сначала в текст работы, а затем перенесите их в бланк**

**ответов №1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки, без запятых, пробелов и каких-либо дополнительных символов. Каждую цифру пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведенными в бланке образцами.**

**В1.** На тело, поступательно движущееся в инерциальной системе отсчета, действовала равнодействующая постоянная сила  $\vec{F}$  в течение времени  $\Delta t$ . Если время  $\Delta t$  действия силы увеличится, то как изменятся модуль импульса силы, модуль ускорения тела и модуль изменения импульса тела?

Для каждой величины определите соответствующий характер изменения:

1) увеличится; 2) уменьшится; 3) не изменится.

Запишите в таблицу выбранные цифры для каждой физической величины. Цифры в ответе могут повторяться.

| Модуль импульса<br>равнодействующей силы | Модуль ускорения<br>тела | Модуль изменения<br>импульса тела |
|--|--------------------------|-----------------------------------|
|  |                          |                                   |

**В2.** Неразветвленная электрическая цепь состоит из источника постоянного тока и внешнего сопротивления. Как изменятся при увеличении внутреннего сопротивления источника тока следующие величины: сила тока во внешней цепи, напряжение на внешнем сопротивлении, общее сопротивление цепи?

Для каждой величины определите соответствующий характер изменения:

1) увеличится; 2) уменьшится; 3) не изменится.

Запишите в таблицу выбранные цифры для каждой физической величины. Цифры в ответе могут повторяться.

| Сила тока<br>во внешней цепи | Напряжение на<br>внешнем сопротивлении | Общее<br>сопротивление цепи |
|------------------------------|--|-----------------------------|
|                              |  |                             |

**В3.** Температура нагревателя идеального теплового двигателя, работающего по циклу Карно, равна  $T_1$ , а температура холодильника равна  $T_2$ . За цикл двигатель получает от нагревателя количество теплоты  $Q_1$ . Установите соответствие между физическими величинами и формулами, по которым их можно рассчитать.

К каждой позиции первого столбца подберите соответствующую позицию второго и запишите в таблицу выбранные цифры

под соответствующими буквами.

## ФИЗИЧЕСКИЕ ВЕЛИЧИНЫ

А) КПД двигателя

Б) работа, совершаемая двигателем за цикл

## ФОРМУЛЫ

1)  $1 - \frac{T_2}{T_1}$

2)  $\frac{Q_1(T_1 - T_2)}{T_1}$

3)  $\frac{T_1 - T_2}{T_1}$

4)  $\frac{Q_1 T_2}{T_1}$

Ответ:

| А | Б |
|---|---|
|   |   |

**В4.** В первой экспериментальной установке отрицательно заряженная частица влетает в однородное магнитное поле так, что вектор скорости  $\vec{v}_0$  перпендикулярен индукции магнитного поля (рис. 12,а). Во второй экспериментальной установке вектор скорости  $\vec{v}_0$  такой же частицы параллелен напряженности электрического поля (рис.12,б).

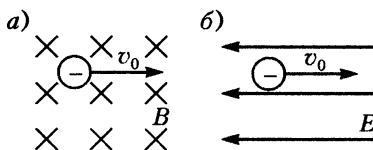


Рис. 12

Установите соответствие между экспериментальными установками и траекториями движения частиц в них.

К каждой позиции первого столбца подберите соответствующую позицию второго и запишите в таблицу выбранные цифры под соответствующими буквами.

## ДВИЖЕНИЕ ЧАСТИЦЫ

А) в первой установке

Б) во второй установке

## ТРАЕКТОРИЯ

1) прямая линия

2) окружность

3) спираль

4) парабола

Ответ:

| А | Б |
|---|---|
|   |   |

## Часть 3

**Задания части 3 представляют собой задачи. Рекомендуется провести их предварительное решение**



**на черновике. При выполнении заданий А22–А25 в бланке ответов №1 под номером выполняемого Вами задания поставьте знак «х» в клеточке, номер которой соответствует номеру выбранного Вами ответа.**

**А22.** Камень, брошенный с крыши дома почти вертикально вверх со скоростью 10 м/с, упал на землю через 3 с после броска. С какой высоты брошен камень? Сопротивление воздуха не учитывать.

- 1) 75 м; 2) 20 м; 3) 30 м; 4) 15 м.

**А23.** В закрытом сосуде находится 2 г водяного пара под давлением 50 кПа и при температуре 100 °С. Не изменяя температуры, объем сосуда уменьшили в 4 раза. Найдите массу образовавшейся при этом воды.

- 1) 1 г; 2) 2 г; 3) 1,5 г; 4) 0,5 г.

**А24.** Два точечных положительных заряда  $q_1 = 30$  нКл и  $q_2 = 10$  нКл находятся в вакууме на расстоянии  $L = 0,5$  м друг от друга. Определите величину напряженности электрического поля этих зарядов в точке А, расположенной на прямой, соединяющей заряды, на расстоянии  $2L$  от второго заряда (рис.13).

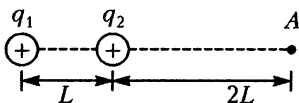


Рис. 13

- 1) 420 Н/Кл; 2) 105 Н/Кл; 3) 210 Н/Кл; 4) 375 Н/Кл.

**А25.** Красная граница фотоэффекта для калия равна  $\lambda_0 = 0,62$  мкм. Какую максимальную скорость могут иметь фотоэлектроны, вылетающие с поверхности калиевого фотокатода при облучении его светом длиной волны  $\lambda = 0,42$  мкм?

- 1) 580 км/с; 2) 58 км/с; 3) 140 км/с; 4) 14 км/с.

**Полное решение задач С1–С6 необходимо записать в бланке ответов №2. При оформлении решения в бланке ответов №2 запишите сначала номер задания (С1, С2 и т.д.), а затем решение соответствующей задачи. Ответы записывайте четко и разборчиво.**

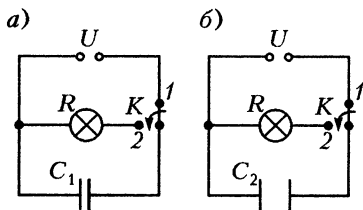


Рис. 14

**С1.** Два плоских воздушных конденсатора подключены к одинаковым источникам постоянного напряжения и одинаковым лампам, как показано на рисунках 14, а и б. Конден-

саторы имеют одинаковую площадь пластин, но различаются расстоянием между пластинами. В некоторый момент времени ключи  $K$  в обеих схемах переводят из положения 1 в положение 2. Опираясь на законы электродинамики, объясните, в каком из приведенных опытов при переключении ключа лампа вспыхнет ярче. Сопротивлением соединяющих проводов пренебречь.

**Полное правильное решение каждой из задач С2–С6 должно включать законы и формулы, применение которых необходимо и достаточно для решения задачи, а также математические преобразования, расчеты с численным ответом и, при необходимости, рисунок, поясняющий решение.**

**С2.** При выполнении трюка «Летающий велосипедист» гонщик движется по гладкому трамплину под действием силы тяжести, начиная движение из состояния покоя с высоты  $H$  (рис. 15). На краю трамплина скорость гонщика направлена под

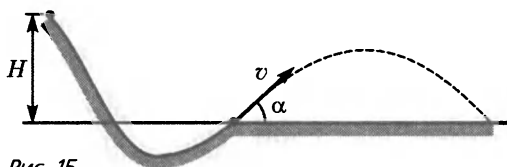


Рис. 15

углом  $\alpha = 60^\circ$  к горизонту. Пролетев по воздуху, он приземляется на горизонтальный стол, находящийся на той же высоте, что и край трамплина. Какова дальность полета гонщика?

**С3.** Цикл тепловой машины, рабочим веществом которой является один моль идеального одноатомного газа, состоит из изотермического расширения, изохорного охлаждения и адиабатического сжатия. В изохорном процессе температура газа понижается на  $\Delta T$ , а работа, совершенная газом в изотермическом процессе, равна  $A$ . Определите КПД тепловой машины.

**С4.** Какую разность потенциалов приложили к однородному медному цилиндрическому проводнику длиной 10 м, если за 15 с его температура повысилась на 10 К? Изменением сопротивления проводника и рассеянием тепла при его нагревании пренебречь. (Удельное сопротивление меди  $1,7 \cdot 10^{-8}$  Ом  $\cdot$  м, плотность меди 8900 кг/м<sup>3</sup>.)

**С5.** Квадратную рамку из медной проволоки со стороной  $b = 5$  см перемещают вдоль оси  $x$  по гладкой горизонтальной поверхности с постоянной скоростью  $v = 1$  м/с. Начальное положение рамки изображено на рисунке 16. За время движе-

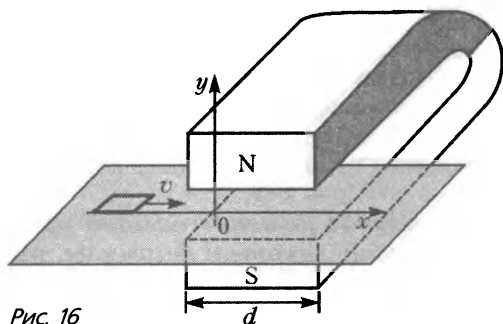


Рис. 16

ния рамка успевает полностью пройти между полюсами магнита. Индукционные токи, возникающие в рамке, оказывают тормозящее действие, поэтому для поддержания постоянной скорости движения к ней прикладывают внешнюю силу  $F$ , направленную вдоль оси  $x$ . Чему равно сопротивление проволоки рамки, если суммарная работа внешней силы за время движения  $A = 2,5 \cdot 10^{-3}$  Дж? Ширина полюсов магнита  $d = 20$  см, магнитное поле имеет резкую границу, однородно между полюсами, а его индукция  $B = 1$  Тл.

**С6.** Мощность излучения лазерной указки с длиной волны  $\lambda = 600$  нм равна  $P = 2$  мВт. Определите число фотонов, излучаемых указкой за 1 с.

### Вариант 2

#### Часть 1

**A1.** За 10 секунд скорость автомобиля, движущегося равноускоренно по прямой дороге, увеличилась от 0 до 20 м/с. Пройденный автомобилем путь равен:

- 1) 50 м; 2) 200 м; 3) 150 м;
- 4) 100 м.

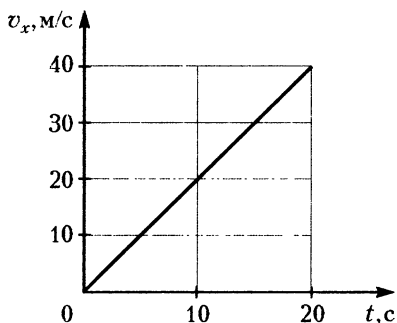


Рис. 17

**A2.** Скорость тела массой 3 кг, движущегося вдоль оси  $x$  в инерциальной системе отсчета, изменяется со временем в соответствии с графиком (рис.17). Равнодействующая приложенных к телу сил в момент времени  $t = 10$  с равна:

- 1) 30 Н; 2) 6 Н; 3) 60 Н;
- 4) 1,5 Н.

**A3.** Две упругие пружины растянуты силами одной и той же величины  $F$ . Удлинение первой пружины  $\Delta l_1$  в 1,5 раза больше, чем удлинение второй пружины  $\Delta l_2$ . Если жесткость первой пружины равна  $k_1$ , то жесткость второй равна:

- 1)  $0,67k_1$ ; 2)  $2,25k_1$ ; 3)  $0,5k_1$ ; 4)  $1,5k_1$ .

**A4.** Одинаковые шары движутся со скоростями, направления которых показаны на рисунке 18, и сталкиваются. Как будет направлен суммарный импульс шаров после столкновения, если  $v_2 = v_1\sqrt{2}$ ?

- 1)  $\uparrow$ ; 2)  $\swarrow$ ; 3)  $\leftarrow$ ; 4)  $\downarrow$ .

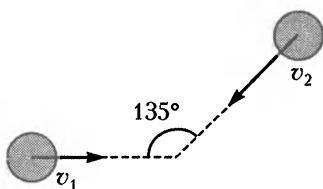


Рис. 18

**A5.** Координата тела массой 8 кг, движущегося вдоль оси  $x$ , изменяется по закону  $x = x_0 + v_x t$ , где  $x_0 = 6$  м,  $v_x = 8$  м/с. Кинетическая энергия тела в момент времени  $t = 2$  с равна:

- 1) 484 Дж; 2) 144 Дж; 3) 256 Дж; 4) 400 Дж.

**A6.** Однородный куб опирается одним ребром на гладкий пол, другим — на вертикальную стену (рис.19). Плечо силы  $\vec{N}$  относительно оси, проходящей через точку  $A$  перпендикулярно плоскости рисунка, равно:

- 1)  $O_2O$ ; 2)  $O_2A$ ; 3) 0; 4)  $AO$ .

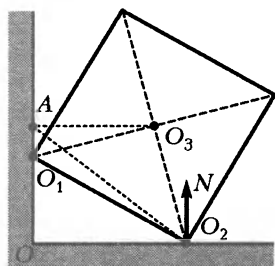


Рис. 19

**A7.** Температура первого тела равна  $5^\circ\text{C}$ , второго тела 263 К, третьего тела равна  $-15^\circ\text{C}$ . Каков правильный порядок перечисления этих тел по убыванию температуры?

- 1) 3, 1, 2; 2) 2, 1, 3; 3) 1, 2, 3; 4) 3, 2, 1.

**A8.** 3 моль водорода находятся в сосуде при температуре  $T$  и давлении  $p$ . Каким будет давление в том же сосуде при температуре  $2T$ , если из него удалить 2 моль водорода? (Водород считать идеальным газом.)

- 1)  $6p$ ; 2)  $\frac{2}{3}p$ ; 3)  $\frac{3}{2}p$ ; 4)  $\frac{1}{6}p$ .

**A9.** В понедельник и во вторник температура воздуха была одинаковой. Парциальное давление водяного пара в атмосфере в понедельник было меньше, чем во вторник. Относительная влажность воздуха:

- 1) в понедельник была меньше, чем во вторник;

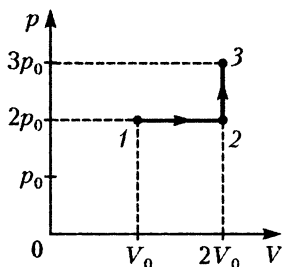


Рис. 20

2) была одинакова, так как не менялась температура воздуха;

3) во вторник была меньше, чем в понедельник;

4) была одинакова, так как не менялось давление насыщенных паров.

**A10.** Идеальный газ переводят из состояния 1 в состояние 3 так, как показано на графике зависимости давления газа от объема (рис.20). Работа, совершенная при этом газом, равна:

- 1)  $6p_0V_0$ ; 2)  $2p_0V_0$ ; 3)  $4p_0V_0$ ; 4)  $p_0V_0$ .

**A11.** На рисунке 21 показано направление вектора напряженности электрического поля  $\vec{E}$  в точке A, равноудаленной от равных по модулю точечных зарядов  $q_1$  и  $q_2$ . Какие знаки имеют заряды?

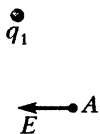


Рис. 21

1)  $q_1 > 0$ ,  $q_2 < 0$ ; 2)  $q_1 > 0$ ,  $q_2 > 0$ ;

3)  $q_1 < 0$ ,  $q_2 < 0$ ; 4)  $q_1 < 0$ ,  $q_2 > 0$ .

**A12.** К батарее с ЭДС, равной 24 В, и внутренним сопротивлением 2 Ом подключили резистор сопротивлением 4 Ом. Какова сила тока в цепи?

- 1) 3 А; 2) 6 А; 3) 4 А; 4) 12 А.

**A13.** Протон  $p$ , влетевший в зазор между полюсами электромагнита, имеет скорость  $\vec{v}$  направленную горизонтально перпендикулярно вектору индукции  $\vec{B}$  магнитного поля (рис.22; здесь кружок с точкой указывает направление движения протона). Куда направлена действующая на протон сила Лоренца  $\vec{F}$ ?

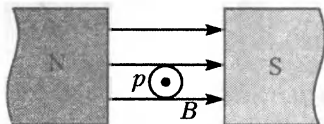


Рис. 22

- 1) Вертикально вверх  $\uparrow$ ;  
2) горизонтально влево  $\leftarrow$ ;  
3) от наблюдателя  $\otimes$ ;  
4) вертикально вниз  $\downarrow$ .

**A14.** При вращении в однородном магнитном поле плоскости металлического кольца из тонкой проволоки вокруг оси, перпендикулярной линиям поля, максимальная сила индукционного тока, возникающего в кольце, равна  $I_1$ . Чему будет равна максимальная сила индукционного тока  $I_2$  в этом кольце при уменьшении скорости вращения кольца в 2 раза?

- 1)  $I_2 = 2I_1$ ; 2)  $I_2 = 0,5I_1$ ; 3)  $I_2 = I_1$ ; 4)  $I_2 = 4I_1$ .

**A15.** Какому из предметов 1–4 соответствует изображение  $AB$  в тонкой линзе с фокусным расстоянием  $F$  (рис.23)?

1) Предмету 1; 2) предмету 2; 3) предмету 3; 4) предмету 4.

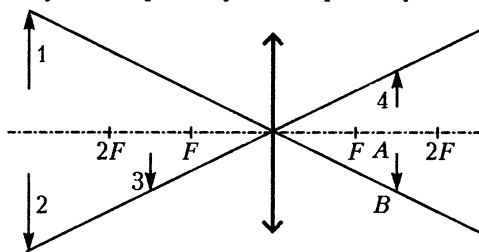


Рис. 23

**A16.** Точечные источники света  $S_1$  и  $S_2$  находятся близко друг от друга и создают на удаленном экране  $\mathcal{E}$  устойчивую интерференционную картину (рис. 24). Это возможно, если  $S_1$  и  $S_2$  – малые отверстия в непрозрачном экране, освещенные:

- 1) одно зеленым лазером, другое красным;
- 2) лучом одного лазера;
- 3) каждое своей лампочкой накаливания;
- 4) каждое своей горячей свечой.

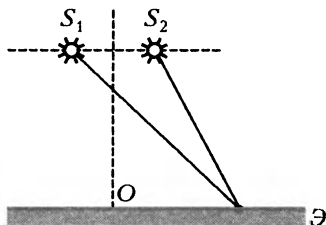


Рис. 24

**A17.** На металлическую пластинку падает монохроматическая электромагнитная волна, выбивающая электроны из пластинки. Максимальная кинетическая энергия фотоэлектронов, вылетевших из пластинки в результате фотоэффекта, составляет 3 эВ, а работа выхода из металла в 2 раза больше этой энергии. Чему равна энергия фотонов в падающей волне?

- 1) 2 эВ; 2) 3 эВ; 3) 9 эВ; 4) 6 эВ.

**A18.** Связанная система элементарных частиц содержит 14 нейтронов, 13 протонов и 10 электронов. Эта система частиц является:

- 1) нейтральным атомом кремния  $^{27}_{14}\text{Si}$ ;
- 2) ионом кремния  $^{27}_{14}\text{Si}$ ;
- 3) ионом алюминия  $^{27}_{13}\text{Al}$ ;
- 4) нейтральным атомом алюминия  $^{27}_{13}\text{Al}$ .

**A19.** Из ядер таллия  $^{208}_{81}\text{Tl}$  при  $\beta$ -распаде с периодом полураспада 3 мин образуются стабильные ядра свинца. В

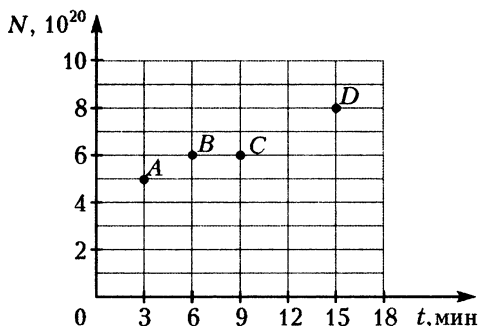


Рис. 25

момент начала наблюдения в образце содержится  $8 \cdot 10^{20}$  ядер таллия. Через какую из точек, кроме начала координат, пройдет график зависимости числа ядер свинца от времени (рис.25)?

- 1) B; 2) A;  
3) D; 4) C.

**A20.** Ученик изучал в школьной лаборатории колебания математического маятника. Результаты измерений каких величин дадут ему возможность рассчитать частоту малых колебаний математического маятника?

Результаты измерений каких величин дадут ему возможность рассчитать частоту малых колебаний математического маятника?

1) Массы маятника  $m$  и знание табличного значения ускорения свободного падения  $g$ ;

2) амплитуды колебаний маятника  $A$  и его массы  $m$ ;

3) длины нити маятника  $l$  и знание табличного значения ускорения свободного падения  $g$ ;

4) амплитуды колебаний маятника  $A$  и знание табличного значения ускорения свободного падения  $g$ .

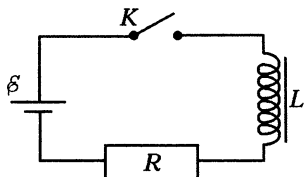


Рис. 26

**A21.** Катушка индуктивности подключена к источнику тока с пренебрежимо малым внутренним сопротивлением через резистор сопротивлением  $R = 40$  Ом (рис.26). В момент  $t = 0$  ключ  $K$  замыкают.

Значения силы тока в цепи, измеренные в последовательные моменты времени с точностью  $\pm 0,01$  А, представлены в таблице:

|               |   |      |      |      |      |      |      |      |      |
|---------------|---|------|------|------|------|------|------|------|------|
| $t, \text{с}$ | 0 | 0,5  | 1,0  | 1,5  | 2,0  | 3,0  | 4,0  | 5,0  | 6,0  |
| $I, \text{А}$ | 0 | 0,12 | 0,19 | 0,23 | 0,26 | 0,29 | 0,29 | 0,30 | 0,30 |

Оцените модуль ЭДС самоиндукции катушки в момент времени  $t = 1,0$  с.

- 1) 11,6 В; 2) 9,2 В; 3) 4,4 В; 4) 7,6 В.

## Часть 2

**В1.** В процессе расширения 1 моль разреженного гелия его внутренняя энергия все время остается неизменной. Как изменяются при этом температура гелия, его давление и объем?

Для каждой величины определите соответствующий характер изменения:

1) увеличивается; 2) уменьшается; 3) не изменяется.

Запишите в таблицу выбранные цифры для каждой физической величины. Цифры в ответе могут повторяться.

| Температура гелия | Давление гелия | Объем гелия |
|-------------------|----------------|-------------|
|                   |                |             |

**В2.** Плоский конденсатор подключен к гальваническому элементу. Как изменятся при уменьшении зазора между обкладками конденсатора три величины: емкость конденсатора, величина заряда на его обкладках, разность потенциалов между ними?

Для каждой величины определите соответствующий характер изменения:

1) увеличится; 2) уменьшится; 3) не изменится.

Запишите в таблицу выбранные цифры для каждой физической величины. Цифры в ответе могут повторяться.

| Емкость конденсатора | Величина заряда конденсатора | Разность потенциалов между обкладками конденсатора |
|----------------------|------------------------------|--|
|                      |                              |  |

**В3.** Мячик бросают с начальной скоростью  $\vec{v}_0$  под углом  $\alpha$  к горизонту с балкона высотой  $h$  (рис.27). Сопротивлением воздуха пренебречь. Графики А и Б (рис.28) представляют собой зависимости физических величин, характеризующих движение мячика в процессе полета, от времени  $t$ . Установите соответствие между графиками и физическими величинами, зависимости которых от времени эти графики могут представлять.

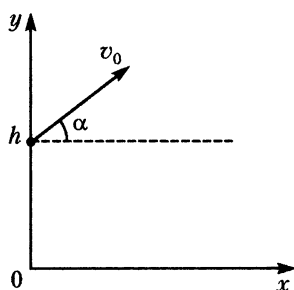


Рис. 27



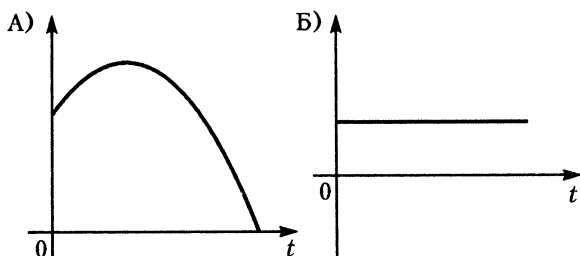


Рис. 28

К каждой позиции первого столбца подберите соответствующую позицию второго и запишите в таблицу выбранные цифры под соответствующими буквами.

# ГРАФИКИ

А)

Б)

# ФИЗИЧЕСКИЕ ВЕЛИЧИНЫ

- 1) координата  $x$  мячика
- 2) проекция скорости мячика на ось  $x$
- 3) кинетическая энергия мячика
- 4) координата  $y$  мячика

Ответ:

| А | Б |
|---|---|
|   |   |

**В4.** Заряженная частица массой  $m$ , несущая положительный заряд  $q$ , движется перпендикулярно линиям индукции однородного магнитного поля  $\vec{B}$  по окружности со скоростью  $v$ . Действием силы тяжести пренебречь. Установите соответствие между физическими величинами и формулами, по которым их можно рассчитать.

К каждой позиции первого столбца подберите соответствующую позицию второго и запишите в таблицу выбранные цифры под соответствующими буквами.

# ФИЗИЧЕСКИЕ ВЕЛИЧИНЫ

- А) модуль магнитной силы, действующей на частицу
- Б) период обращения частицы по окружности

# ФОРМУЛЫ

- 1)  $\frac{v}{qB}$
- 2)  $\frac{mv}{qB}$
- 3)  $\frac{2\pi m}{qB}$
- 4)  $qvB$

Ответ:

|   |   |
|---|---|
| А | Б |
|   |   |

### Часть 3

**A22.** Однородный стержень  $AB$  массой 100 г покоится, упираясь в стык дна и стенки банки концом  $B$  и опираясь на край банки в точке  $C$  (рис.29). Модуль силы, с которой стержень давит на стенку сосуда в точке  $C$ , равен 0,5 Н. Чему равен модуль горизонтальной составляющей силы, с которой стержень давит на сосуд в точке  $B$ , если модуль вертикальной составляющей этой силы равен 0,6 Н? Трением пренебречь.

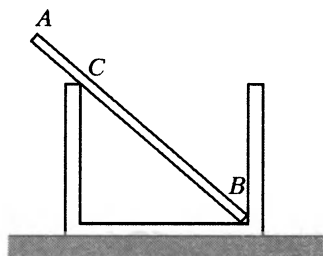


Рис. 29

1) 0,25 Н; 2) 0,13 Н; 3) 0,6 Н; 4) 0,3 Н.

**A23.** Кусок льда, имеющий температуру  $0^\circ\text{C}$ , помещен в калориметр с электронагревателем. Чтобы превратить этот лед в воду с температурой  $20^\circ\text{C}$ , требуется количество теплоты 100 кДж. Какая температура установится внутри калориметра, если лед получит от нагревателя количество теплоты 75 кДж? Теплоемкостью калориметра и теплообменом с внешней средой пренебречь.

1)  $4^\circ\text{C}$ ; 2)  $8^\circ\text{C}$ ; 3)  $15^\circ\text{C}$ ; 4)  $0^\circ\text{C}$ .

**A24.** Частица массой 1 мг переместилась за 3 с на расстояние 0,45 м по горизонтали в однородном горизонтальном электрическом поле напряженностью 5000 В/м. Начальная скорость частицы равна нулю. Каков заряд частицы? Сопротивлением воздуха и действием силы тяжести пренебречь.

1)  $2 \cdot 10^{-9}$  Кл; 2)  $2 \cdot 10^{-11}$  Кл; 3)  $3 \cdot 10^{-8}$  Кл; 4)  $1 \cdot 10^{-11}$  Кл.

**A25.** За время  $t = 4$  с детектор поглощает  $N = 6 \cdot 10^5$  фотонов падающего на него монохроматического света. Поглощаемая мощность  $P = 5 \cdot 10^{-14}$  Вт. Какова длина волны падающего света?

1) 0,6 мкм; 2) 0,4 мкм; 3) 780 нм; 4) 520 нм.

**C1.** При изучении давления света проведены два опыта с одним и тем же лазером. В первом опыте свет лазера направляется на пластинку, покрытую сажей, а во втором – на зеркальную пластинку такой же площади. В обоих опытах пластинки находятся на одинаковом расстоянии от лазера и свет падает

перпендикулярно поверхности пластинок. Как изменится сила давления света на пластинку во втором опыте по сравнению с первым? Ответ поясните, указав, какие физические закономерности Вы использовали для объяснения.

**С2.** Пружинное ружье наклонено под углом  $\alpha = 30^\circ$  к горизонту. Энергия сжатой пружины равна 0,41 Дж. При выстреле шарик массой  $m = 50$  г проходит по стволу ружья расстояние  $b$ , вылетает и падает на расстоянии  $L = 1$  м от дула ружья в точку  $M$ , находящуюся с ним на одной высоте (рис.30).

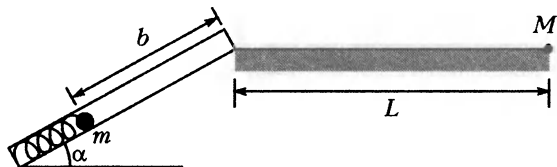


Рис. 30

Найдите расстояние  $b$ . Трением в стволе и сопротивлением воздуха пренебречь.

**С3.** Тепловой двигатель использует в качестве рабочего вещества 1 моль идеального одноатомного газа. Цикл работы двигателя изображен на  $pV$ -диаграмме и состоит из двух адиабат, изохоры, изобары (рис.31). Зная, что КПД этого цикла  $\eta = 15\%$ , а минимальная и максимальная температуры газа при изохорном процессе  $t_{\min} = 37^\circ\text{C}$  и  $t_{\max} = 302^\circ\text{C}$ , определите количество теплоты, получаемое газом за цикл.

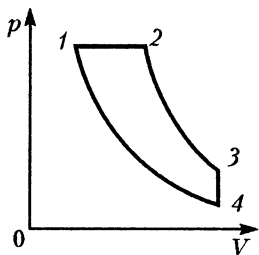


Рис. 31

**С4.** Какая тепловая мощность будет выделяться на резисторе  $R_1$  в схеме, изображенной на рисунке 32, если резистор  $R_2$  перегорит (превратится в разрыв цепи)? Все резисторы, включенные в схему, имеют одинаковое сопротивление  $R = 20$  Ом. Внутреннее сопротивление источника  $r = 2$  Ом, его ЭДС  $\mathcal{E} = 110$  В.

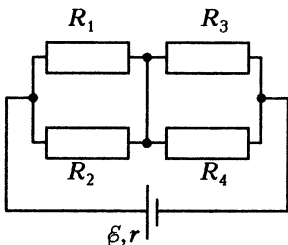


Рис. 32

**С5.** Квадратная проволочная рамка со стороной  $l = 10$  см находится в однородном магнитном поле с индукцией  $\vec{B}$ . На рисунке 33 изображено изменение проекции вектора  $\vec{B}$  на перпендикуляр к плоскости рамки с

течением времени. За время  $t = 10$  с в рамке выделяется количество теплоты  $Q = 0,1$  мДж. Каково сопротивление проволоки, из которой сделана рамка?

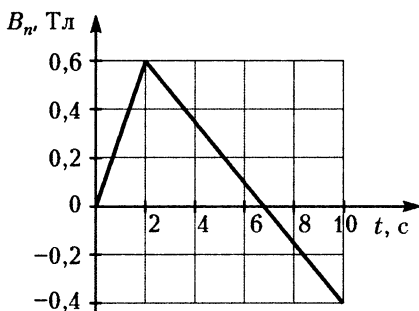


Рис. 33

**С6.** На рисунке 34 представлены энергетические

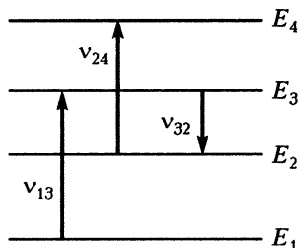


Рис. 34

уровни атома и указаны частоты световых волн, испускаемых и поглощаемых при переходах между ними:  $\nu_{13} = 7 \cdot 10^{14}$  Гц,  $\nu_{32} = 3 \cdot 10^{14}$  Гц. При переходе с уровня  $E_4$  на уровень  $E_1$  атом излучает свет с длиной волны  $\lambda = 360$  нм. Какова частота колебаний световой волны, поглощаемой атомом при переходе с уровня  $E_2$  на уровень  $E_4$ ?

## ТРЕНИРОВОЧНЫЙ ВАРИАНТ ЕГЭ 2015 ГОДА

### Вариант 3

#### Инструкция по выполнению работы

Для выполнения экзаменационной работы по физике отводится 235 минут. Работа состоит из 2 частей, включающих 32 задания.

К заданиям 1, 2, 8, 9, 13, 14, 19, 20 и 23 дается 4 варианта ответа, из которых правильный только 1. Обведите номер верного ответа.

В заданиях 6, 7, 11, 12, 17, 18, 22 и 24 ответ необходимо записать в виде набора из двух цифр. Ответ на задания запишите в указанном месте. В заданиях 3 – 5, 10, 15, 16, 21, 25 – 27 ответ в виде числа необходимо записать в указанном месте. Единицы измерения физических величин писать не нужно.

Обведенные номера ответов и записанные в тексте варианта ответы на задания перенесите в бланк ответов №1 рядом с номером задания.

На задания 28–32 требуется дать развернутые решения.

При вычислениях разрешается использовать непрограммируемый калькулятор.

Все бланки ЕГЭ заполняются яркими черными чернилами. Допускается использование гелевой, капиллярной или перьевой ручек.

При выполнении заданий Вы можете пользоваться черновиком. Обращаем Ваше внимание на то, что записи в черновике не будут учитываться при оценивании работы.

Советуем выполнять задания в том порядке, в котором они даны. Для экономии времени пропускайте задание, которое не удастся выполнить сразу, и переходите к следующему. Если после выполнения всей работы у Вас останется время, Вы сможете вернуться к пропущенным заданиям.

Баллы, полученные Вами за выполненные задания, суммируются. Постарайтесь выполнить как можно больше заданий и набрать наибольшее количество баллов.<sup>1</sup>

## Часть 1

**При выполнении заданий части 1 в бланке ответов №1 рядом с номером выполняемого Вами задания (1–24) запишите номер выбранного ответа или ответ. Единицы измерения физических величин писать не нужно.**

1. На рисунке 35 приведен график зависимости проекции скорости тела  $v_x$  от времени. С каким графиком (1); 2); 3); 4))

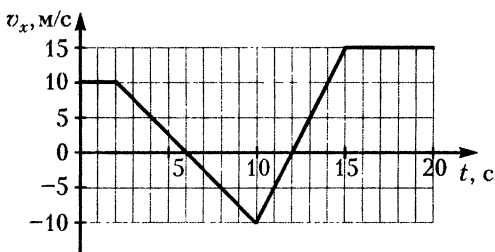


Рис. 35

на рисунке 36 совпадает график зависимости от времени проекции ускорения этого тела  $a_x$  в интервале времени от 2 с до 5 с?

2. Один конец легкой пружины жесткостью  $k$  закреплен неподвижно,

а к другому ее концу прикреплен груз массой  $m$  (рис.37). Груз перемещают с постоянной скоростью по горизонтали из положения, в котором пружина растянута на величину  $x_1 = b$ , в

<sup>1</sup> Справочные данные, которые могут понадобиться при выполнении работы, приведены выше. (Прим. ред.)

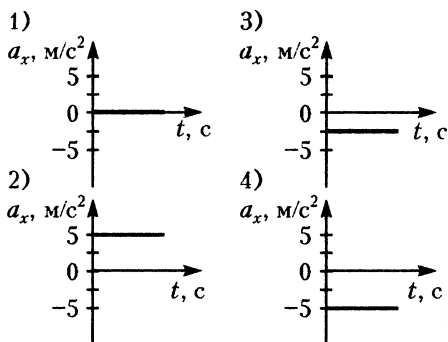


Рис. 36

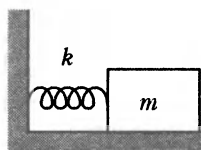


Рис. 37

положение, в котором пружина сжата на величину  $x_2 = a$ . При этом потенциальная энергия пружины:

- 1) сохраняется;
- 2) уменьшается на  $\frac{k(a+b)^2}{2}$ ;
- 3) уменьшается на  $\frac{ka^2}{2} + \frac{kb^2}{2}$ ;
- 4) изменяется на  $\frac{ka^2}{2} - \frac{kb^2}{2}$ .

3. На рисунке 38,а представлены направления векторов скорости  $\vec{v}$  и ускорения  $\vec{a}$  мяча в инерциальной системе отсчета. Какое из представленных на рисунке 38,б направлений (1, 2, 3 или 4) имеет вектор равнодействующей всех сил  $\vec{F}$ , приложенных к мячу, в этой системе отсчета?

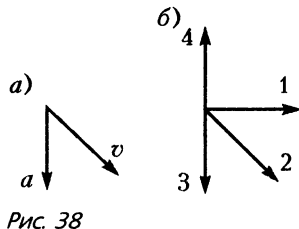


Рис. 38

Ответ: \_\_\_\_\_.

4. Расстояние от спутника до центра Земли равно трем радиусам Земли. Во сколько раз уменьшится сила притяжения спутника к Земле, если расстояние от него до центра Земли станет равным шести радиусам Земли?

Ответ: уменьшится в \_\_\_\_\_ раз(а).

5. Период собственных малых колебаний пружинного маятника равен 1,2 с. Каким станет период колебаний, если массу груза пружинного маятника уменьшить в 4 раза?

Ответ: \_\_\_\_\_ с.

6. Шарик, брошенный горизонтально с высоты  $H$  с начальной скоростью  $v_0$ , за время  $t$  пролетел в горизонтальном

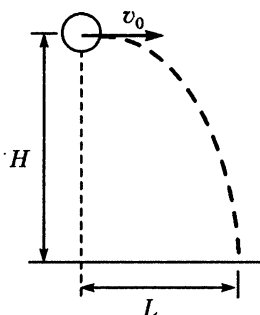


Рис. 39

направлении расстояние  $L$  (рис.39). Что произойдет с дальностью полета и ускорением шарика, если на этой же установке уменьшить начальную скорость шарика в 2 раза? Сопротивлением воздуха пренебречь.

Для каждой величины определите соответствующий характер ее изменения:

1) увеличится; 2) уменьшится; 3) не изменится.

Запишите в таблицу выбранные цифры для каждой физической величины. Цифры в ответе могут повторяться.

| Дальность полета | Ускорение |
|------------------|-----------|
|                  |           |

7. Грузовик массой  $m$ , движущийся по прямолинейному горизонтальному участку дороги со скоростью  $v$ , совершает торможение до полной остановки. При торможении колеса грузовика не вращаются. Коэффициент трения между колесами и дорогой равен  $\mu$ . Установите соответствие между физическими величинами и формулами, по которым их можно рассчитать.

К каждой позиции первого столбца подберите соответствующую позицию второго и запишите в таблицу выбранные цифры под соответствующими буквами.

### ФИЗИЧЕСКИЕ ВЕЛИЧИНЫ

А) модуль силы трения, действующей на грузовик

Б) тормозной путь грузовика

### ФОРМУЛЫ

1)  $\mu mg$

2)  $\mu g$

3)  $\frac{v}{\mu g}$

4)  $\frac{v^2}{2\mu g}$

Ответ:

| А | Б |
|---|---|
|   |   |

8. Укажите пару веществ, скорость взаимной диффузии которых наименьшая при прочих равных условиях:

- 1) раствор медного купороса и вода;
- 2) пары эфира и воздух;
- 3) свинцовая и медная пластины;
- 4) вода и спирт.

9. При  $0^\circ\text{C}$  вода кристаллизуется и переходит из жидкого состояния в твердое. В процессе кристаллизации:

- 1) уменьшается температура, возрастает внутренняя энергия;
- 2) уменьшаются и температура, и внутренняя энергия;
- 3) уменьшается внутренняя энергия, не изменяется температура;
- 4) уменьшается температура, не изменяется внутренняя энергия.

10. На рисунке 40 показано расширение водорода двумя способами: 1–2 и 3–4. Во сколько раз работа в процессе 3–4 больше работы в процессе 1–2?

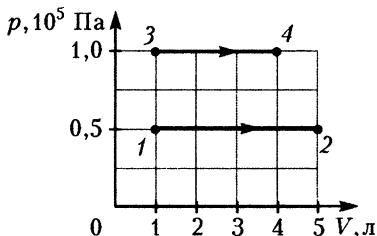


Рис. 40

Ответ: \_\_\_\_\_ раз(а).

11. В сосуде неизменного объема находилась при комнатной температуре смесь двух идеальных газов, по 1 моль каждого. Половину содержимого сосуда выпустили, а затем добавили в сосуд 1 моль первого газа. Как изменились в результате парциальное давление первого газа и их суммарное давление, если температура газов в сосуде поддерживалась неизменной?

Для каждой величины определите соответствующий характер изменения:

- 1) увеличилась;
- 2) уменьшилась;
- 3) не изменилась.

Запишите в таблицу выбранные цифры для каждой физической величины. Цифры в ответе могут повторяться.

| Парциальное давление<br>первого газа | Давление смеси газов<br>в сосуде |
|--------------------------------------|----------------------------------|
|                                      |                                  |

12. На рисунке 41 приведены графики А и Б двух процессов 1–2 и 3–4, происходящих с 1 моль гелия. Графики построены в координатах  $V$ – $T$  и  $p$ – $V$ , где  $p$  – давление,  $V$  – объем и  $T$  – абсолютная температура газа. Установите соответствие между графиками и утверждениями, характеризующими изображенные на графиках процессы.



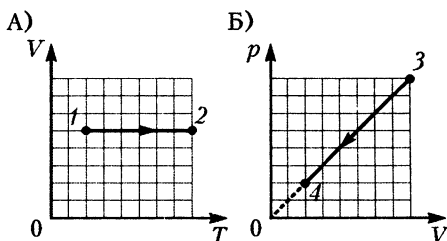


Рис. 41

К каждой позиции первого столбца подберите соответствующую позицию второго и запишите в таблицу выбранные цифры под соответствующими буквами.

### ГРАФИКИ

А)

Б)

### УТВЕРЖДЕНИЯ

- 1) над газом совершают работу, при этом его внутренняя энергия увеличивается
- 2) над газом совершают работу, при этом газ отдает положительное количество теплоты
- 3) газ получает положительное количество теплоты и совершает работу
- 4) газ получает положительное количество теплоты, при этом его внутренняя энергия увеличивается

Ответ:

| А | Б |
|---|---|
|   |   |

**13.** На плоскую непрозрачную пластину с двумя узкими параллельными щелями падает по нормали плоская монохроматическая волна из красной части видимого спектра. За пластиной на параллельном ей экране наблюдается интерференционная картина. Если использовать монохроматический свет из зеленой части видимого спектра, то:

- 1) интерференционная картина исчезнет;
- 2) расстояние между интерференционными полосами не изменится;
- 3) расстояние между интерференционными полосами уменьшится;
- 4) расстояние между интерференционными полосами увеличится.

**14.** Электрон  $e$  влетает в зазор между полюсами электромаг-

нита со скоростью  $\vec{v}$ , направленной горизонтально (рис.42). Вектор индукции  $\vec{B}$  магнитного поля направлен вертикально. Как направлена действующая на электрон сила Лоренца  $\vec{F}$ ?

- 1) От наблюдателя  $\otimes$ ;
- 2) к наблюдателю  $\odot$ ;
- 3) горизонтально вправо  $\rightarrow$ ;
- 4) вертикально вверх  $\uparrow$ .

15. Сила взаимодействия между двумя точечными заряженными телами была равна 3 мН. Расстояние между ними уменьшили в 3 раза, а заряд одного из тел уменьшили в 9 раз. Определите величину сил кулоновского взаимодействия.

Ответ: \_\_\_\_\_ мН.

16. При скорости  $v_1$  поступательного движения прямолинейного проводника в постоянном однородном магнитном поле на концах проводника возникает разность потенциалов  $U$ . При движении этого проводника в том же направлении в той же плоскости со скоростью  $v_2$  разность потенциалов на концах проводника уменьшилась в 4 раза. Чему равно отношение  $v_1/v_2$ ?

Ответ: \_\_\_\_\_.

17. По проволочному резистору течет ток. Как изменятся при уменьшении длины проволоки в 4 раза и увеличении силы тока вдвое следующие величины: тепловая мощность, выделяющаяся на резисторе, и его электрическое сопротивление?

Для каждой величины определите соответствующий характер изменения:

- 1) увеличится; 2) уменьшится; 3) не изменится.

Запишите в таблицу выбранные цифры для каждой физической величины. Цифры в ответе могут повторяться.

| Тепловая мощность, выделяющаяся на резисторе | Электрическое сопротивление резистора |
|--|---------------------------------------|
|  |                                       |

18. В опыте нить накала лампочки расположена вблизи главной оптической оси тонкой линзы с фокусным расстоянием  $F$  перпендикулярно этой оси. Расстояние  $a$  от линзы до спирали равно  $2F$ . Сначала в опыте использовали рассеивающую линзу, а затем – собирающую. Установите соответствие между видом линзы, использовавшейся в опыте, и свойствами изображения. К каждой позиции первого столбца подберите соответствующую

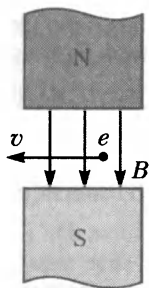


Рис. 42

позицию второго столбца и запишите в таблицу выбранные цифры под соответствующими буквами.

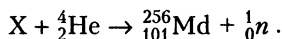
| ВИД ЛИНЗЫ             | СВОЙСТВА ИЗОБРАЖЕНИЯ                                |
|-----------------------|---|
| А) линза рассеивающая | 1) действительное, перевернутое, равное по размерам |
| Б) линза собирающая   | 2) мнимое, прямое, уменьшенное                      |
|                       | 3) действительное, увеличенное, перевернутое        |
|                       | 4) мнимое, увеличенное, перевернутое                |

|        |   |   |
|--------|---|---|
| Ответ: | А | Б |
|        |   |   |

**19.** Связанная система элементарных частиц содержит 2 электрона, 3 нейтрона и 4 протона. Эта система может являться:

- 1) нейтральным атомом гелия  ${}^4_2\text{He}$ ;
- 2) ионом лития  ${}^9_3\text{Li}$ ;
- 3) ионом бериллия  ${}^7_4\text{Be}$ ;
- 4) нейтральным атомом углерода  ${}^9_6\text{C}$ .

**20.** Элемент менделевий был получен при бомбардировке  $\alpha$ -частицами ядер элемента X в соответствии с реакцией



Элементом X являлся:

- 1) эйнштейний  ${}^{253}_{99}\text{Es}$ ;
- 2) лоуренсий  ${}^{253}_{103}\text{Lr}$ ;
- 3) нобелий  ${}^{254}_{102}\text{No}$ ;
- 4) фермий  ${}^{252}_{100}\text{Fm}$ .

**21.** В таблице приведены значения энергии для четырех самых нижних энергетических уровней атома водорода:

| Номер уровня | Энергия, $10^{-19}$ Дж |
|--------------|------------------------|
| 1            | -21,8                  |
| 2            | -5,4                   |
| 3            | -2,4                   |
| 4            | -1,4                   |

Если рассматривать переходы атома только между этими уровнями, то при переходе между какими энергетическими уровнями наблюдается излучение с наибольшей длиной волны?

Ответ: при переходе с уровня номер \_\_\_\_ на уровень номер \_\_\_\_.

*Ответ запишите в виде двух цифр, не меняя порядок их следования.*

**22.** При исследовании зависимости кинетической энергии фотоэлектронов от частоты падающего света фотоэлемент освещался через светофильтры. В первой серии опытов использовался светофильтр, пропускающий только синий свет, а во второй – только зеленый. В каждом опыте наблюдали явление фотоэффекта и измеряли напряжение запириания. Как изменится частота световой волны, напряжение запириания при переходе от первой серии опытов ко второй?

Для каждой величины определите соответствующий характер ее изменения:

1) увеличится; 2) уменьшится; 3) не изменится.

Запишите в таблицу выбранные цифры для каждого ответа.

Цифры в ответе могут повторяться.

| Частота волны света, падающего на фотоэлемент | Напряжение запириания |
|---|-----------------------|
|   |                       |

**23.** Ученик измерял относительную влажность воздуха с помощью психрометра (двух термометров, колбочка одного из них обернута влажной тканью; рис.43) и психрометрической таблицы, где влажность указана в процентах. Достоверно известно, что относительная влажность воздуха в классе равна 76%. Исправен ли влажный термометр в ученическом опыте?

1) Неисправен: должен показывать 20 °С ;

2) неисправен: должен показывать 30 °С ;

3) неисправен: должен показывать 25 °С ;

4) исправен.

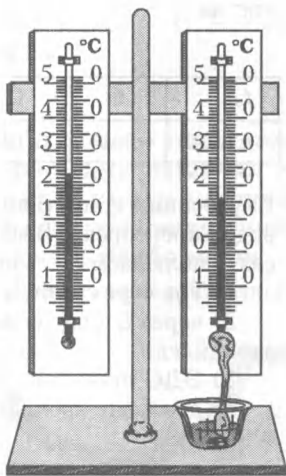


Рис. 43

| $t_{\text{сух. терм.}}$ | Разность показаний сухого и влажного термометров |    |    |    |    |    |    |    |    |
|-------------------------|--|----|----|----|----|----|----|----|----|
| °C                      | 0  | 1  | 2  | 3  | 4  | 5  | 6  | 7  | 8  |
| 15                      | 100  | 90 | 80 | 71 | 61 | 52 | 44 | 36 | 27 |
| 16                      | 100  | 90 | 81 | 71 | 62 | 54 | 45 | 37 | 30 |
| 17                      | 100  | 90 | 81 | 72 | 64 | 55 | 47 | 39 | 32 |
| 18                      | 100  | 91 | 82 | 73 | 64 | 56 | 48 | 41 | 34 |
| 19                      | 100  | 91 | 82 | 74 | 65 | 58 | 50 | 43 | 35 |
| 20                      | 100  | 91 | 83 | 74 | 66 | 59 | 51 | 44 | 37 |
| 21                      | 100  | 91 | 83 | 75 | 67 | 60 | 52 | 46 | 39 |
| 22                      | 100  | 92 | 83 | 76 | 68 | 61 | 54 | 47 | 40 |
| 23                      | 100  | 92 | 84 | 76 | 69 | 61 | 55 | 48 | 42 |
| 24                      | 100  | 92 | 84 | 77 | 69 | 62 | 56 | 49 | 43 |
| 25                      | 100  | 92 | 84 | 77 | 70 | 63 | 57 | 50 | 44 |

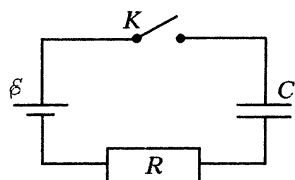


Рис. 44

**24.** Конденсатор подключен к источнику тока последовательно с резистором сопротивлением  $R = 20 \text{ кОм}$  (рис.44). В момент времени  $t = 0$  ключ замыкают. В этот момент конденсатор полностью разряжен. Результаты измерений силы тока в цепи, выполненных с точностью  $\pm 1 \text{ мкА}$ , представлены в таблице:

| $t, \text{с}$   | 0   | 1   | 2  | 3  | 4 | 5 | 6 |
|-----------------|-----|-----|----|----|---|---|---|
| $I, \text{мкА}$ | 300 | 110 | 40 | 15 | 5 | 2 | 1 |

Внутренним сопротивлением источника и сопротивлением проводов пренебречь. Выберите *два* верных утверждения о процессах, наблюдаемых в опыте.

- 1) Ток через резистор в процессе наблюдения увеличивается;
- 2) через 6 с после замыкания ключа конденсатор полностью зарядился;
- 3) ЭДС источника тока составляет 6 В;
- 4) в момент времени  $t = 3 \text{ с}$  напряжение на резисторе равно 0,6 В;
- 5) в момент времени  $t = 3 \text{ с}$  напряжение на конденсаторе равно 5,7 В.

Ответ: 

|  |  |
|--|--|
|  |  |
|--|--|

## Часть 2

**При выполнении заданий 25–27 части 2 в бланке ответов №1 рядом с номером выполняемого Вами задания запишите ответ. Единицы измерения физических величин писать не нужно.**

**25.** Кусок льда опустили в термос с водой. Начальная температура льда  $0\text{ }^{\circ}\text{C}$ , начальная температура воды  $30\text{ }^{\circ}\text{C}$ . Теплоемкостью термоса можно пренебречь. При переходе к тепловому равновесию часть льда массой  $210\text{ г}$  растаяла. Чему равна исходная масса воды в термосе?

Ответ: \_\_\_\_\_ г.

**26.** Два точечных положительных заряда  $q_1 = 85\text{ нКл}$  и  $q_2 = 140\text{ нКл}$  находятся в вакууме на расстоянии  $L = 2\text{ м}$  друг от друга (рис.45). Определите величину напряженности электрического поля этих зарядов в точке А, расположенной на прямой, соединяющей заряды, на расстоянии  $L$  от первого заряда.

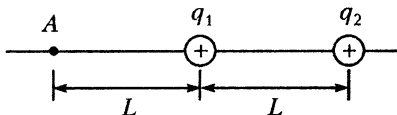


Рис. 45

Ответ: \_\_\_\_\_ В/м.

**27.** Заряженная частица движется в однородном магнитном поле по окружности радиусом  $2 \cdot 10^{-3}\text{ м}$ . Сила, действующая на частицу со стороны магнитного поля, равна  $1,6 \cdot 10^{-13}\text{ Н}$ . Какова кинетическая энергия движущейся частицы?

Ответ: \_\_\_\_\_ эВ.

**Полное решение задач 28–32 необходимо записать в бланке ответов №2. При оформлении решения в бланке ответов №2 запишите сначала номер задания (28, 29 и т.д.), а затем решение соответствующей задачи. Ответы записывайте четко и разборчиво.**

**28.** Маленькая шайба движется из состояния покоя по неподвижной гладкой сферической поверхности радиусом  $R$  (рис.46). Начальное положение шайбы находится на высоте  $R/2$  относительно нижней точки поверхности. Сделайте рисунок с указанием сил, действующих на

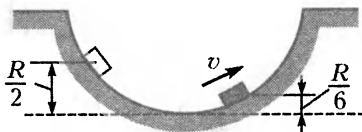


Рис. 46

шайбу в момент, когда она движется вправо-вверх, находясь на высоте  $R/6$  над нижней точкой поверхности. Покажите на этом рисунке, куда направлено в этот момент ускорение шайбы (по радиусу поверхности, по касательной к поверхности, внутрь поверхности, наружу от поверхности). Ответ обоснуйте. Сопротивление воздуха не учитывать.

**Полное правильное решение каждой из задач 29–32 должно включать законы и формулы, применение которых необходимо и достаточно для решения задачи, а также математические преобразования, расчеты с численным ответом и, при необходимости, рисунок, поясняющий решение.**

**29.** На границе раздела двух несмешивающихся жидкостей, имеющих плотности  $\rho_1 = 400 \text{ кг/м}^3$  и  $\rho_2 = 2\rho_1$ , плавает однородный шарик (рис.47). Какой должна быть плотность шарика  $\rho$ , чтобы выше границы раздела жидкостей была одна четверть его объема?

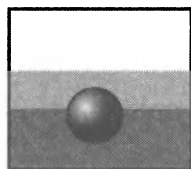


Рис. 47

**30.** В камере, заполненной азотом, при температуре  $T_0 = 300 \text{ К}$  находится открытый цилиндрический сосуд (рис.48,а). Высота сосуда  $L = 50 \text{ см}$ . Сосуд плотно закрывают цилиндрической пробкой и охлаждают до температуры  $T_1$ . В результате расстояние от дна сосуда до низа пробки становится равным  $h = 40 \text{ см}$  (рис. 48,б). Затем сосуд нагревают до первоначальной температуры  $T_0$ . Расстояние от дна сосуда до низа пробки при этой температуре становится равным  $H = 46 \text{ см}$

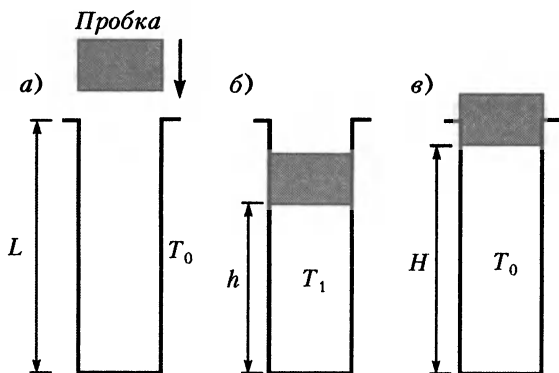


Рис. 48

(рис. 48,б). Чему равно  $T_1$ ? Величину силы трения между пробкой и стенками сосуда считать одинаковой при движении пробки вниз и вверх. Массой пробки пренебречь. Давление азота в камере во время эксперимента поддерживается постоянным.

**31.** Металлический стержень, согнутый в виде буквы П, закреплен в горизонтальной плоскости (рис.49). На параллельные стороны стержня опирается концами перпендикулярная перемычка массой 92 г и длиной 1 м. Сопротивление перемычки равно 0,1 Ом. Вся система находится в однородном вертикальном магнитном поле с индукцией 0,15 Тл. С какой установившейся скоростью будет двигаться перемычка, если к ней приложить постоянную горизонтальную силу 1,13 Н? Коэффициент трения между стержнем и перемычкой равен 0,25. Сопротивлением стержня пренебречь. Сделайте рисунок с указанием сил, действующих на перемычку.

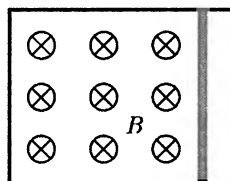


Рис. 49

**32.** В открытый контейнер поместили 1,5 г изотопа полония  $^{210}_{84}\text{Po}$ . Затем контейнер герметично закрыли. Изотоп полония радиоактивен и претерпевает альфа-распад с периодом полураспада примерно 140 дней, превращаясь в стабильный изотоп свинца. Через 5 недель давление внутри контейнера составило  $1,4 \cdot 10^5$  Па. Определите объем контейнера. Температура внутри контейнера поддерживается постоянной и равна  $45^\circ\text{C}$ . Атмосферное давление равно  $10^5$  Па.

*Публикацию подготовили М.Демидова, А.Черноуцан*



## МЕЖРЕГИОНАЛЬНАЯ ОЛИМПИАДА «ВЫСШАЯ ПРОБА»

### МАТЕМАТИКА

#### *Отборочный тур*

7 класс (проходной порог – 8 задач)

1. Сколько раз к наибольшему однозначному числу нужно прибавить наибольшее двузначное число, чтобы получить наибольшее трехзначное число?

2. Одним пакетиком чая можно заварить 2 или 3 стакана чая. Мила и Таня разделили коробку чайных пакетиков поровну. Мила заварила 33 стакана чая, а Таня – 47 стаканов. Сколько пакетиков было в коробке?

3. В некотором месяце три воскресенья были четными числами. Каким днем недели было 15-е число этого месяца? (Если ответ «понедельник» – то пишите 1, если «вторник» – то 2, и т.д.)

4. Волк и Лиса делят между собой найденный в лесу клад. Волк взял себе половину всех золотых монет, Лиса – треть оставшихся монет, затем Волк – четверть оставшихся, затем Лиса –  $\frac{1}{5}$  оставшихся монет, Волк –  $\frac{1}{6}$ , Лиса –  $\frac{1}{7}$  часть оставшихся монет. Оставшиеся нераспределенными после такого дележа монеты были подарены на день рождения Зайцу. Сколько монет получил Заяц на день рождения, если известно, что он получил меньше 100 монет?

5. Имеется 24 одинаковых ведра: 5 полностью наполнены водой, 11 наполнены водой наполовину, 8 пусты. Три человека распределили эти ведра между собой так, что у всех оказалось одинаковое число ведер и одинаковый объем воды (при этом вода не переливалась между ведрами, не выливалась из ведер и не добавлялась ни из каких источников). Пусть у первого человека оказалось  $a$  наполовину наполненных ведер, у второго –  $b$ , у третьего –  $c$ . Найдите наибольшее возможное значение  $abc$ .

6. Узлами на бумаге в клеточку назовем точки пересечения вертикальных линий с горизонтальными. Вася отметил в узлах

тетради в клеточку вершины квадрата  $10 \times 10$ , стороны которого проходят по линиям сетки, а после – все узлы, которые находятся внутри или на границе этого квадрата. В итоге оказался отмечен 121 узел. Далее он соединил отрезком каждую пару «соседних» узлов, т.е. узлов на расстоянии 1 клетка друг от друга. При этом никакой отрезок не оказался проведенным дважды, в том числе и отрезки на границе квадрата. Какова суммарная длина проведенных Васей отрезков в сантиметрах (длина стороны клетки считается равной  $1/2$  сантиметра)?

7. На стороне  $BC$  неравностороннего треугольника  $ABC$  выбрали точку  $D$ . Оказалось, что каждый из треугольников  $ABD$  и  $ACD$  – равнобедренный, а один из них еще и прямоугольный. Найдите величину наименьшего из углов треугольника  $ABC$  в градусах.

8. Вася каким-то образом расставляет скобки в выражении  $4 \cdot 12 + 18 : 6 + 4$  и вычисляет значение полученного выражения. Какое наибольшее число могло у него получиться?

9. Сколько среди целых чисел от 100 до 10000 таких, в записи которых встречаются ровно три одинаковых цифры?

10.  $N$  богатырей хотят составить график боевых дежурств на  $N$  дней так, чтобы каждый день дежурили три богатыря, и никакие два богатыря не дежурили вместе дважды. При каком наименьшем  $N$  это возможно?

8 класс (проходной порог – 6 задач)

1. Волк и Лиса делят между собой найденный в лесу клад. Волк взял себе половину всех золотых монет, Лиса – треть оставшихся монет, затем Волк – четверть оставшихся, затем Лиса –  $1/5$  оставшихся монет, Волк –  $1/6$ , Лиса –  $1/7$ , Волк –  $1/8$ , наконец Лиса –  $1/9$  часть оставшихся монет. Оставшиеся нераспределенными после такого дележа монеты были подарены на день рождения Зайцу. Сколько монет получил Заяц на день рождения, если известно, что он получил меньше 500 монет?

2. Одним пакетиком чая можно заварить 2 или 3 стакана чая. Мила и Таня разделили коробку чайных пакетиков поровну. Мила заварила 57 стаканов чая, а Таня – 83 стакана. Сколько пакетиков было в коробке?

3. Узлами на бумаге в клеточку назовем точки пересечения вертикальных линий с горизонтальными. Вася отметил в узлах тетради в клеточку вершины квадрата  $20 \times 20$ , стороны которого проходят по линиям сетки, а после – все узлы, которые находятся внутри или на границе этого квадрата. В итоге оказался отмечен 441 узел. Далее он соединил отрезком каждую пару

«соседних» узлов, т.е. узлов на расстоянии 1 клетка друг от друга. При этом никакой отрезок не оказался проведенным дважды, в том числе и отрезки на границе квадрата. Какова суммарная длина проведенных Васей отрезков в сантиметрах (длина стороны клетки считается равной  $1/2$  сантиметра)?

4. Вася каким-то образом расставляет скобки в выражении  $4 \cdot 12 + 18 : 6 + 3$  и вычисляет значение полученного выражения. Какое наибольшее число могло у него получиться?

5. Сколько среди целых чисел от 100 до 10000 таких, в записи которых встречаются ровно три одинаковых цифры?

6. В правильном шестиугольнике проведены все диагонали (рис.1). Какое наименьшее число точек нужно отметить строго внутри шестиугольника так, чтобы на каждой диагонали лежала хотя бы одна отмеченная точка?

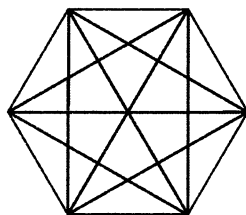


Рис. 1

7. Точку с координатами (299, 253) соединили с точкой с координатами (0, 0). Сколько точек, обе координаты которых целые, лежат внутри этого отрезка (не считая концов)?

8. Сколько существует способов расставить на шахматной доске  $8 \times 8$  белую ладью и черного короля так, чтобы ладья била короля, но король не бил ладью? Способы расстановки, получающиеся друг из друга поворотом доски, считаются разными. (Ладья бьет короля, если он находится с ней на одной горизонтали или вертикали, т.е. в одной из закрашенных клеток на рисунке 2. Король бьет ладью, если ладья находится в одной из соседних с ним клеток, т.е. в одной из закрашенных клеток на рисунке 3).

9. Окружность пересекает сторону  $AB$  треугольника  $ABC$  в точках  $K, L$ , сторону  $BC$  – в точках  $M, N$ , сторону  $CA$  – в точках

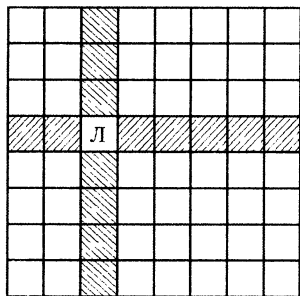


Рис. 2

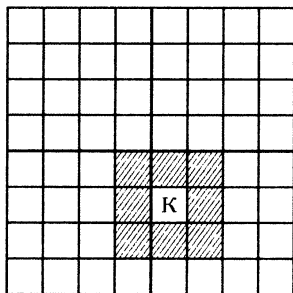


Рис. 3

$R, S$ . Известно, что  $KL = MN = RS = 6$ ,  $AB = 12$ ,  $BC = 16$ ,  $\angle B = 90^\circ$ . Найдите радиус окружности.

10. Определим числа  $T_1, T_2, \dots, T_{256}$  следующим образом:  $T_1 = 2$  и  $T_n = 2^{T_{n-1}}$  для любого  $2 \leq n \leq 256$ . Найдите остаток от деления числа  $T_1 + T_2 + \dots + T_{256}$  на 255.

9 класс (проходной порог – 5 задач)

1. В детский сад завезли карточки для обучения чтению: на некоторых написано «МА», на остальных – «НЯ». Каждый ребенок взял три карточки и стал составлять из них слова. Оказалось, что слово «МАМА» могут сложить из своих карточек 25 детей, слово «НЯНЯ» – 30 детей, а слово «МАНЯ» – 36 детей. У скольких ребят все три карточки одинаковы?

2. В некотором натуральном числе посчитали сумму цифр. У получившегося числа снова посчитали сумму цифр, и у получившегося числа снова посчитали сумму цифр. Известно, что каждая новая сумма оказывалась не равна предыдущей. Найдите наименьшее возможное исходное число.

3. На стороне  $AC$  треугольника  $ABC$  выбраны 400 точек  $P_1, P_2, \dots, P_{400}$ . (Каждая точка  $P_i$  лежит между  $A$  и  $P_{i+1}$ , точки выбираются произвольно и могут делить сторону на отрезки различной длины.) Рассматриваются треугольники  $ABP_1, P_1P_2, \dots, P_{399}P_{400}, P_{400}BC$ . Какое наибольшее количество равнобедренных может быть среди них?

4. Из множества  $\{1, 2, 3, 4\}$  выбираются три натуральных числа  $a, b, c$  (не обязательно различных). Сколько способов это сделать так, чтобы число  $a^{(b^c)}$  делилось на 4?

5. В магазине фрукты продаются только в упаковках двух видов: упаковка из 3 яблок и 12 груш стоит 6 долларов, упаковка из 12 яблок и 5 груш стоит 11 долларов. Требуется купить одинаковое (ненулевое) количество яблок и груш. Какую минимальную цену (в долларах) придется заплатить?

6. Пусть  $x_1, x_2, x_3, x_4$  – различные корни уравнения  $x^4 - 2^{2013}x^2 + 49$ , идущие в порядке возрастания, т.е.  $x_1 < x_2 < x_3 < x_4$ . Найдите значение выражения

$$-\frac{(7+x_1)(7+x_3)}{(1+x_2)(1+x_4)}.$$

7. Диаграмма (рис. 4) состоит из 24 единичных квадратов. Лягушка из каждой клетки может прыгнуть либо на одну клетку вниз, либо на одну клетку влево-вниз по диагонали (не выходя при этом за границы диаграммы). Сколько существует путей

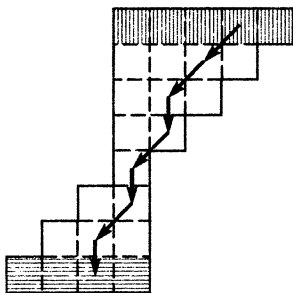


Рис. 4

лягушки, ведущих из верхнего ряда квадратов в нижний? (На рисунке показан один из путей лягушки. Верхний ряд квадратов выделен вертикальной штриховкой, нижний ряд – горизонтальной штриховкой.)

8. Какое наименьшее количество точек нужно отметить строго внутри правильного семиугольника так, чтобы на каждой диагонали лежала хотя бы одна отмеченная точка?

9. Окружность пересекает сторону  $AB$  треугольника  $ABC$  в точках  $K, L$ , сторону  $BC$  – в точках  $M, N$ , сторону  $AC$  – в точках  $R, S$ . Дано:  $KL = MN = RS = 6$ ,  $AB = 10$ ,  $BC = 24$ ,  $\angle ABC = 90^\circ$ . Найдите радиус окружности.

10. В выражении  $(1+x)(1+x^2)(1+x^3)\dots(1+x^{1000})$  раскрыли все скобки и привели подобные слагаемые. Сколько слагаемых получилось?

10 класс (проходной порог – 4 задачи)

1. В двух ящиках лежат белые и черные шары. Если из каждого ящика вынуть по одному шару, то вероятность того, что они оба окажутся белыми, равна  $0,147$ , а вероятность того, что оба окажутся черными –  $0,377$ . В одном из ящиков все черные шары перекрасили в белый цвет, а все белые перекрасили в черный цвет, после чего из каждого ящика вынули по шару. Найдите вероятность того, что эти шары будут одного цвета.

2. Найдите наименьшее натуральное  $a > 1$ , для которого  $\sqrt{a\sqrt{a\sqrt{a}}}$  – натуральное число.

3. На стороне  $AC$  треугольника  $ABC$  выбраны 450 точек  $P_1, P_2, \dots, P_{450}$ . (Каждая точка  $P_i$  лежит между  $A$  и  $P_{i+1}$ , точки выбираются произвольно и могут делить сторону на отрезки различной длины.) Рассматриваются треугольники  $ABP_1, P_1P_2, \dots, P_{449}P_{450}, P_{450}BC$ . Какое наибольшее количество равнобедренных может быть среди них?

4. Три мотоциклиста едут по кругу с постоянными, но разными скоростями, первый и второй – по часовой стрелке, третий – против часовой стрелки, причем скорость второго больше, чем скорость первого. Они стартуют одновременно из точки  $A$ . В момент, когда второй мотоциклист проехал ровно 8 кругов (т.е. в 8-й раз вернулся в точку  $A$ ), состоялась его 3-я встреча с первым мотоциклистом и 20-я встреча с третьим. Какая

по счету встреча первого и третьего мотоциклистов произошла в этот момент? (Встречи отсчитываются после начала движения. Пребывание мотоциклистов в точке  $A$  в начальный момент времени встречей не считается.)

5. В магазине фрукты продаются только в упаковках двух видов: упаковка из 7 яблок и 17 груш стоит 100 рублей, упаковка из 18 яблок и 4 груш стоит 120 рублей. Требуется купить одинаковое (ненулевое) количество яблок и груш. Какую минимальную цену (в рублях) придется заплатить?

6. Пусть  $x_1, x_2, x_3, x_4$  – различные корни уравнения  $x^4 - 2^{121}x^2 + 121$ , идущие в порядке возрастания, т.е.  $x_1 < x_2 < x_3 < x_4$ . Найдите значение выражения

$$-\frac{(11+x_1)(11+x_3)}{(1+x_2)(1+x_4)}.$$

7. Последовательность  $T_n$  определена следующим образом:  $T_1 = 2$ ,  $T_n = 2^{T_{n-1}}$  при  $n \geq 2$ . Найдите остаток от деления числа  $T_1 + T_2 + \dots + T_{255}$  на 255.

8. Окружность пересекает сторону  $AB$  треугольника  $ABC$  в точках  $K, L$ , сторону  $BC$  – в точках  $M, N$ , сторону  $AC$  – в точках  $R, S$ . Дано:  $KL = MN = RS = 1,5$ ,  $AB = 3$ ,  $BC = 4$ ,  $\angle ABC = 90^\circ$ . Найдите радиус окружности.

9. В выражении  $(1+x)(1+x^2)(1+x^3)\dots(1+x^{2000})$  раскрыли все скобки и привели подобные слагаемые. Сколько слагаемых получилось?

10. Джек-потрошитель начинает рубить деревья, имея в начальный момент запас энергии, равный 100 единицам. За каждую минуту он может совершить одно из двух действий: либо срубить  $n$  деревьев, где  $n$  – количество единиц его энергии в начале минуты, и тогда к концу минуты его энергия уменьшается на 1, либо отдохнуть (не срубив за минуту ни одного дерева); и тогда к концу минуты его запас энергии увеличивается на 1. Какое максимальное количество деревьев может он срубить за 60 минут?

11 класс (проходной порог – 5 задач)

1. На стороне  $AC$  треугольника  $ABC$  выбраны 500 точек  $P_1, P_2, \dots, P_{500}$ . (Каждая точка  $P_i$  лежит между  $A$  и  $P_{i+1}$ , точки выбираются произвольно и могут делить сторону на отрезки различной длины.) Рассматриваются треугольники  $ABP_1, P_1BP_2, \dots, P_{499}BP_{500}, P_{500}BC$ . Какое наибольшее количество равнобедренных может быть среди них?

2. В двух ящиках лежат белые и черные шары (в каждом ящике присутствуют шары обоих цветов). Если из каждого ящика вынуть по одному шару, то вероятность того, что они оба окажутся белыми, равна 0,115, а вероятность того, что оба окажутся черными – 0,405. В одном из ящиков все черные шары перекрасили в белый цвет, а все белые перекрасили в черный цвет, после чего из каждого ящика вынули по шару. Найдите вероятность того, что эти шары будут одного цвета.

3. В магазине фрукты продаются только в упаковках двух видов: упаковка из 23 яблок и 9 груш стоит 500 рублей, упаковка из 7 яблок и 19 груш стоит 350 рублей. Требуется купить одинаковое (ненулевое) количество яблок и груш. Какую минимальную цену (в рублях) придется заплатить?

4. Найдите количество натуральных чисел  $n \leq 10^{12}$  таких, что  $\text{НОК}(16, n) = 16n$ .

5. Три мотоциклиста едут по кругу с постоянными скоростями, первый и второй – по часовой стрелке, третий – против часовой стрелки, причем скорость второго больше чем скорость первого. Они стартуют одновременно из точки  $A$ . В момент, когда второй мотоциклист проехал ровно 7 кругов (т.е. в 7-й раз вернулся в точку  $A$ ), состоялась его 3-я встреча с первым мотоциклистом и 21-я встреча с третьим. Какая по счету встреча первого и третьего мотоциклистов произошла в этот момент? (Встречи отсчитываются после начала движения. Пребывание мотоциклистов в точке  $A$  в начальный момент времени встречей не считается.)

6. Точка  $A$  расположена на параболе  $y = x^2$ , а точка  $B$  – на прямой  $y = x - 5,25$ . Найдите минимальное возможное значение величины  $AB^2$ .

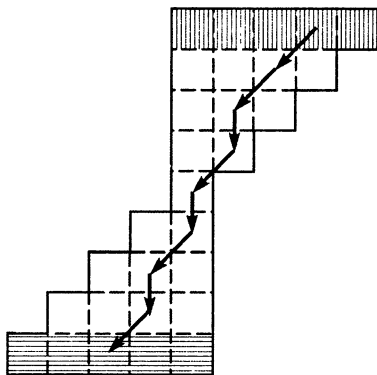


Рис. 5

7. Диаграмма (рис. 5) состоит из 29 единичных квадратов. Лягушка из каждой клетки может прыгнуть либо на одну клетку вниз, либо на одну клетку влево-вниз по диагонали (не выходя при этом за границы диаграммы). Сколько существует путей лягушки, начинающихся в одном из квадратов верхнего ряда и заканчивающихся в одном из квадратов нижнего ряда? (На рисунке показан один из путей).

тей лягушки. Верхний ряд квадратов выделен вертикальной штриховкой, нижний ряд – горизонтальной штриховкой.)

8. Окружность пересекает сторону  $AB$  треугольника  $ABC$  в точках  $K, L$ , сторону  $BC$  – в точках  $M, N$ , сторону  $AC$  – в точках  $R, S$ . Дано:  $KL = MN = RS = 5$ ,  $AB = 18$ ,  $BC = 24$ ,  $\angle ABC = 90^\circ$ . Найдите радиус окружности.

9. В выражении

$$(1+x)(1+x^2)(1+x^3)\dots(1+x^{13})(1+x^{14})(1+x^{1000})^{18}$$

раскрыли все скобки и привели подобные слагаемые. Сколько слагаемых получилось?

10. В правильном 1007-угольнике  $A_1 \dots A_{1007}$  соединены вершины через каждые две, т.е. проведены все диагонали  $A_i A_{i+3}$  (считаем  $A_{1008} = A_1$ ,  $A_{1009} = A_2$  и т.д.) Обозначим  $B_i$  – пересечение диагоналей  $A_i A_{i+3}$  и  $A_{i+1} A_{i-2}$ . Рассмотрим пирамиду, основанием которой является многоугольник  $A_1 B_1 A_2 B_2 \dots A_{1007} B_{1007}$ . (На рисунке 6 показан пример такой пирамиды, где изначально

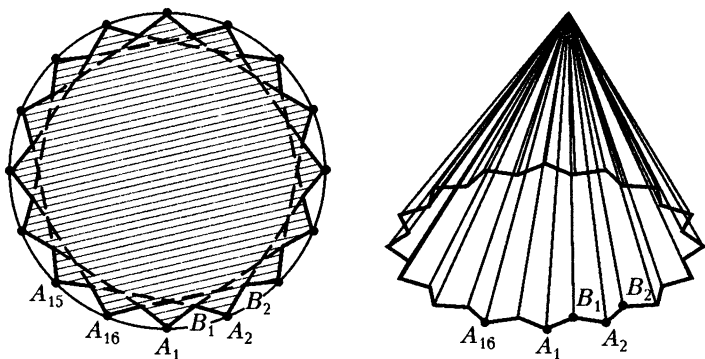


Рис. 6

вместо 1007-угольника взят 16-угольник.) Какое наибольшее количество сторон может иметь многоугольник, получающийся в сечении этой пирамиды плоскостью?

*Заключительный этап*

7 класс

1. В выражение

$$(** + *) (** + *) = ****$$

вставьте цифры вместо звездочек так, чтобы получилось верное равенство и было использовано не более 4-х различных цифр. (Число не может начинаться с нуля).



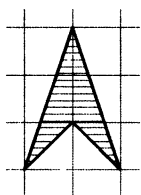


Рис. 7

2. Разрежьте фигуру, изображенную на рисунке 7, на три части так, чтобы из них можно было сложить квадрат. Покажите, как именно сложить из них квадрат. Разрезы могут идти не по линиям сетки.

3. Имеются 4 арбуза, любые два из которых имеют разный вес. Покажите, как за 4 взвешивания на чашечных весах без гирь найти два самых тяжелых арбуза.

4. Картинная галерея имеет форму 9-угольника (не обязательно выпуклого). Оказалось, что при любом расположении двух точечных источников света внутри галереи какая-то точка галереи окажется неосвещенной. Нарисуйте, как могла бы выглядеть такая галерея. Обоснуйте, почему двух источников света не хватит для ее освещения. (Стены галереи непрозрачны и не отражают свет.)

5. Двое играют в такую игру: на рисунке 8 в точке  $A$  стоит фишка. Они ходят фишкой по очереди, с каждым ходом передвигая фишку из точки, в которой она стоит, в одну из названных на рисунке точек, соединенную с нею отрезком. Два раза по одному отрезку ходить нельзя. Кто не может сделать ход, проигрывает. Кто выигрывает при правильной игре обеих сторон?

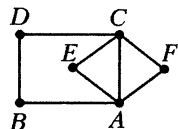


Рис. 8

6. Вдоль берега круглого озера растут яблони. Петя и Вася начинают идти из точки  $A$  на берегу в противоположных направлениях вдоль берега и считают все яблони, встретившись им на пути, а также все яблоки, растущие на яблонях. Встретившись в некоторой точке  $B$ , они сверили результаты. Оказалось, что Петя насчитал вдвое больше яблонь, чем Вася, и в семь раз больше яблок, чем Вася. Их удивил этот результат, и они решили повторить эксперимент. Они отправились из точки  $B$  в тех же направлениях, что изначально, и встретились снова в точке  $C$ . Оказалось, что на пути от  $B$  до  $C$  Петя опять насчитал вдвое больше яблонь, чем Вася, и в семь раз больше яблок, чем Вася. Их удивление стало еще больше, и они опять решили повторить эксперимент. Отправившись из  $C$  в тех же направлениях, они встретились в точке  $D$ . Оказалось, что Петя опять насчитал вдвое больше яблонь, чем Вася. Кто из них на пути от  $C$  до  $D$  насчитал больше яблок и во сколько раз?

## 1. В выражение

$$(** + *)(** + *) = ****$$

вставьте цифры вместо звездочек так, чтобы получилось верное равенство и было использовано не более 4-х различных цифр. (Число не может начинаться с нуля).

2. Известно, что ни одно из чисел  $a$ ,  $b$ ,  $c$  не является целым. Может ли случиться так, что каждое из чисел  $ab$ ,  $bc$ ,  $ca$ ,  $abc$  — целое?

3. Разрежьте фигуру, изображенную на рисунке 9, на три части так, чтобы из них можно было сложить прямоугольник. Покажите, как именно сложить из них прямоугольник. Разрезы могут идти не по линиям сетки. Части можно переворачивать.

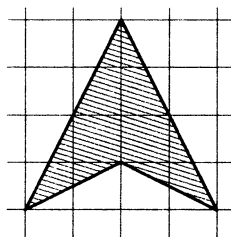


Рис. 9

4. Двое играют в такую игру: на рисунке 8 в точке  $A$  стоит фишка. Они ходят фишкой по очереди, с каждым ходом передвигая фишку из точки, в которой она стоит, в одну из названных на рисунке точек, соединенную с нею отрезком. Два раза по одному отрезку ходить нельзя. Кто не может сделать ход, проигрывает. Кто выигрывает при правильной игре обеих сторон?

5. Вдоль берега круглого озера растут яблони. Петя и Вася начинают идти из точки  $A$  на берегу в противоположных направлениях вдоль берега и считают все яблони, встретившиеся им на пути, а также все яблоки, растущие на яблонях. Встретившись в некоторой точке  $B$ , они сверили результаты. Оказалось, что Петя насчитал вдвое больше яблонь чем Вася, и в семь раз больше яблок, чем Вася. Их удивил этот результат, и они решили повторить эксперимент. Они отправились из точки  $B$  в тех же направлениях, что изначально, и встретились снова в точке  $C$ . Оказалось, что на пути от  $B$  до  $C$  Петя опять насчитал вдвое больше яблонь чем Вася, и в семь раз больше яблок, чем Вася. Их удивление стало еще больше, и они опять решили повторить эксперимент. Отправившись из  $C$  в тех же направлениях, они встретились в точке  $D$ . Оказалось, что Петя опять насчитал вдвое больше яблонь, чем Вася. Кто из них на пути от  $C$  до  $D$  насчитал больше яблок и во сколько раз?

6. Высоты остроугольного неравнобедренного треугольника  $ABC$ , пересекаются в точке  $H$ ,  $I$  — центр вписанной окружности

треугольника  $ABC$ ,  $O$  – центр описанной окружности треугольника  $BHC$ . Известно, что точка  $I$  лежит на отрезке  $OA$ . Найдите угол  $BAC$ .

9 класс

1. Известно, что ни одно из чисел  $a$ ,  $b$ ,  $c$  не является целым. Может ли случиться так, что каждое из чисел  $ab$ ,  $bc$ ,  $ca$ ,  $abc$  – целое?

2. Точка  $B$  является серединой отрезка  $AC$ . Квадрат  $ABDE$  и равносторонний треугольник  $BCF$  расположены в одной полуплоскости от прямой  $AC$ . Найдите (в градусах) величину острого угла между прямыми  $CD$  и  $AF$ .

3. Двое играют в такую игру: на рисунке 8 в точке  $A$  стоит фишка. Они ходят фишкой по очереди, с каждым ходом передвигая фишку из точки, в которой она стоит, в одну из названных на рисунке точек, соединенную с нею отрезком. Два раза по одному отрезку ходить нельзя. Кто не может сделать ход, проигрывает. Кто выигрывает при правильной игре обеих сторон? Обоснуйте свой ответ.

4. Прямые, содержащие высоты неравнобедренного треугольника  $ABC$ , пересекаются в точке  $H$ ,  $I$  – центр вписанной окружности треугольника  $ABC$ ,  $O$  – центр описанной окружности треугольника  $BHC$ . Известно, что точка  $I$  лежит на отрезке  $OA$ . Найдите угол  $BAC$ .

5. Клетки шахматной доски раскрашиваются в 3 цвета – белый, серый и черный – таким образом, чтобы соседние клетки, имеющие общую сторону, отличались цветом, однако резкая смена цвета (т.е. соседство белой и черной клеток) запрещена. Найдите число таких раскрасок шахматной доски (раскраски, совпадающие при повороте доски на 90 и 180 градусов, считаются разными).

6. Последовательность  $a_n$  строится следующим образом:  $a_1$ ,  $a_2$  – произвольные действительные числа, при  $n \geq 3$  число  $a_n$  равно наименьшему из чисел  $|a_i - a_j|$ ,  $1 \leq i < j \leq n-1$ . Например, если  $a_1 = 6$ ,  $a_2 = \frac{19}{2}$ , то получаем последовательность  $6, \frac{19}{2}, \frac{7}{2}, \frac{5}{2}, 1, 1, 0, 0, 0, \dots$  При некотором выборе  $a_1$  и  $a_2$  получилась последовательность, в которой  $a_{10} = 1$ . Найдите наименьшее возможное значение  $a_3$  в такой последовательности.

1. Могут ли ненулевые числа  $x$ ,  $y$  и  $z$  удовлетворять системе уравнений

$$\begin{cases} x^2 + x = y^2 - y, \\ y^2 + y = z^2 - z, \\ z^2 + z = x^2 - x? \end{cases}$$

2. Действительные числа  $a$ ,  $b$  и  $c$  таковы, что числа  $ab$ ,  $bc$ ,  $ca$  – рациональные. Докажите, что существуют целые не равные нулю одновременно числа  $x$ ,  $y$ ,  $z$  такие, что  $ax + by + cz = 0$ .

3. На координатной плоскости нарисовано множество точек, заданное уравнением  $x = y^2$ . Окружность радиуса 5 с центром в точке  $(11; 1)$  пересекает это множество в точках  $A$ ,  $B$ ,  $C$  и  $D$ . Докажите, что все точки  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$  лежат на одной параболе, т.е. на кривой, задаваемой уравнением  $y = ax^2 + bx + c$ , и найдите уравнение этой параболы.

4. Точка  $O$  – центр описанной окружности остроугольного треугольника  $ABC$ . Прямая  $AO$  пересекает сторону  $BC$  в точке  $P$ . Точки  $E$  и  $F$  на сторонах  $AB$  и  $AC$  соответственно выбираются так, что около четырехугольника  $AEPF$  можно описать окружность. Докажите, что длина проекции отрезка  $EF$  на сторону  $BC$  не зависит от выбора точек  $E$  и  $F$ .

5. На плоскости даны восемь различных точек. Нумерацию этих точек числами от 1 до 8 назовем *хорошей*, если выполнено следующее условие: существует такая прямая, что все точки лежат по одну сторону и на разных расстояниях от нее, и при этом расстояния от точек до этой прямой возрастают с возрастанием номера. Таким образом, ближайшая точка – номер 1, следующая по удаленности – номер 2 и т.д. Какое максимальное количество различных хороших нумераций может быть у заданной восьмерки точек?

6. Пусть  $p > 2$  – целое число, не делящееся на 3. Докажите, что существуют такие целые числа  $a_1, a_2, \dots, a_k$ , что

$$-\frac{p}{2} < a_1 < a_2 < \dots < a_k < \frac{p}{2},$$

и произведение

$$\frac{p - a_1}{|a_1|} \cdot \frac{p - a_2}{|a_2|} \cdot \dots \cdot \frac{p - a_k}{|a_k|}$$

равно  $3^m$  для некоторого натурального  $m$ .

11 класс

1. На координатной плоскости нарисовано множество точек, заданное уравнением  $x = y^2$ . Окружность радиуса 5 с центром в точке  $(11; 1)$  пересекает это множество в точках  $A, B, C$  и  $D$ . Докажите, что все точки  $A, B, C, D$  лежат на одной параболе, т.е. на кривой, задаваемой уравнением  $y = ax^2 + bx + c$ , и найдите уравнение этой параболы.

2. Через вершины правильного шестиугольника проведены 6 различных параллельных прямых. Может ли оказаться так, что все попарные расстояния между этими прямыми являются целыми числами?

3. Последовательность  $a_n$  строится следующим образом:  $a_1, a_2$  – произвольные действительные числа, при  $n \geq 3$  число  $a_n$  равно наименьшему из чисел  $|a_i - a_j|$ ,  $1 \leq i < j \leq n-1$ . Например, если  $a_1 = 6$ ,  $a_2 = \frac{19}{2}$ , то получаем последовательность  $6, \frac{19}{2}, \frac{7}{2}, \frac{5}{2}, 1, 1, 0, 0, 0, \dots$ . При некотором выборе  $a_1, a_2$  получилась последовательность, в которой  $a_{10} = 1$ . Найдите наименьшее возможное значение  $a_3$  в такой последовательности.

4. Многогранник вписан в сферу радиуса  $R$ , а его объем численно равен площади его поверхности.

а) Докажите, что  $R > 3$ .

б) Может ли  $R$  быть больше 1000?

5. Пусть  $p > 2$  – целое число, не делящееся на 3. Докажите, что существуют такие целые числа  $a_1, a_2, \dots, a_k$ , что

$$-\frac{p}{2} < a_1 < a_2 < \dots < a_k < \frac{p}{2}$$

и произведение

$$\frac{p-a_1}{|a_1|} \cdot \frac{p-a_2}{|a_2|} \cdot \dots \cdot \frac{p-a_k}{|a_k|}$$

равно  $3^m$  для некоторого натурального  $m$ .

6. На клетчатой доске размером  $2 \times n$  клеток некоторые клетки закрашиваются в черный цвет. Раскраска называется правильной, если среди закрашенных нет двух соседних клеток. (Соседними называются клетки, имеющие общую сторону.) Раскраска, в которой ни одна клетка не закрашена, тоже считается правильной.

Пусть  $A_n$  – количество правильных раскрасок с четным числом закрашенных клеток,  $B_n$  – количество правильных раскрасок с нечетным числом закрашенных клеток. Найдите все возможные значения  $A_n - B_n$ .

*Публикацию подготовили  
Г.Мутафян, А.Пахарев, О.Шварцман*

## ОЛИМПИАДА «ЛОМОНОСОВ–2014»

В соответствии с Порядком проведения олимпиад школьников олимпиады школьников «Ломоносов» по математике (а также по механике и математическому моделированию) проводились в 2013/14 учебном году в два этапа: отборочный и заключительный. Отборочный этап проводился в режиме онлайн. Он состоял из трех независимых друг от друга туров (ноябрь; декабрь; январь). Каждый школьник мог участвовать в любом из них или в нескольких, выбрав в конце лучший результат. Все задания публиковались на сайте олимпиады [olymp.msu.ru](http://olymp.msu.ru).

К участию в заключительном (очном) этапе, который проводился в марте 2014 года в Москве и ряде городов России, допускались только победители и призеры отборочного этапа.

Ниже приведены задания одного из туров отборочного этапа и задания заключительного этапа для 10 – 11 классов.

### МАТЕМАТИКА

#### *Отборочный этап*

1. Шариковая ручка стоит 10 рублей, гелевая – 50 рублей, а перьевая – 80 рублей. Какое наибольшее количество гелевых ручек можно купить при условии, что всего нужно купить ровно 20 ручек и среди них должны быть ручки всех трех типов, а истратить на них нужно ровно 1000 рублей?

2. Найдите наименьшее значение  $a$ , при котором сумма квадратов корней уравнения  $x^2 - 3ax + a^2 = 0$  равна 0,28.

3. Плоскость, параллельная основанию четырехугольной пирамиды объема 81, отсекает от нее пирамиду объема 3. Найдите объем пирамиды, четыре вершины которой совпадают с вершинами сечения, а пятая лежит в плоскости основания большей пирамиды.

4. Дана функция  $f(x) = \|x + 1\| - 2\|$ . Сколько корней имеет уравнение  $f(f(\dots f(f(x))\dots)) = \frac{1}{2}$ , в котором функция  $f$  берется 2013 раз?

5. Укажите целое число, ближайшее к числу

$$\sqrt{2012 - \sqrt{2013 \cdot 2011}} + \sqrt{2010 - \sqrt{2011 \cdot 2009}} + \dots + \sqrt{2 - \sqrt{3 \cdot 1}}.$$

6. Треугольник  $LOM$  с углом  $\angle LOM = 21^\circ$  повернули на некоторый острый угол вокруг точки  $O$ . При этом точка  $L$  переходит в точку  $N$ , лежащую на стороне  $LM$ , а точка  $M$  – в такую точку  $K$ , что  $OM \perp NK$ . Найдите угол поворота (в градусах).

7. Найдите количество всех целочисленных решений неравенства

$$\sqrt{1 - \sin \frac{\pi x}{4} - 3 \cos \frac{\pi x}{2}} - \sqrt{6} \cdot \sin \frac{\pi x}{4} \geq 0,$$

принадлежащих отрезку [1991; 2013].

8. Найдите площадь фигуры, заданной на координатной плоскости неравенством  $2(2-x) \geq |y-x^2| + |y+x^2|$ .

9. Первоклассница Маша, заходя в школу, каждый раз поднимается на школьное крыльцо по лестнице, имеющей 10 ступенек. Находясь внизу лестницы или на очередной ее ступеньке, она может либо подняться на следующую ступеньку, либо перепрыгнуть через одну ступеньку вверх (перепрыгнуть через две или более ступенек Маша пока не может). Какое минимальное количество раз Маше нужно зайти в школу, чтобы подняться на крыльцо всеми возможными способами?

10. Найдя какой-нибудь многочлен шестой степени  $x^6 + a_4x^5 + \dots + a_5x + a_6$  с целыми коэффициентами, одним из корней которого служит число  $\sqrt{2} + \sqrt[3]{5}$ , впишите в ответ сумму его коэффициентов  $a_1 + a_2 + \dots + a_6$ .

#### *Заключительный этап*

1. Найдите все значения  $a$ , при каждом из которых сумма модулей корней квадратного трехчлена  $x^2 + 2ax + 4a$  равна 3.

2. Маша wypисала на доске подряд все натуральные числа от 2 до 2015. Пришел Ваня и заменил каждое из этих чисел суммой его цифр. Пришла Таня и сделала то же самое с получившимися числами. Так продолжалось до тех пор, пока на доске не осталось 2014 однозначных чисел (цифр). Какова сумма всех оставшихся чисел?

3. Среди всех прямоугольников, вершины которых лежат на сторонах данного ромба, а стороны параллельны диагоналям ромба, наибольшую площадь имеет прямоугольник, отношение сторон которого равно 2. Найдите острый угол ромба.

4. Найдите все пары  $(a, b)$ , при которых множество решений неравенства  $\log_{2014}(x - a) > 2x^2 - x - b$  совпадает с промежутком  $(0; 1)$ .

5. Найдите все значения  $\alpha$ , при каждом из которых нули функций  $f(x) = \sin\left(\frac{3x}{2} - \alpha\right)$  и  $g(x) = 2\sin 2x - 4\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) - \sqrt{3}$  строго чередуются на числовой оси.

6. Для охраны объекта в течение 5 суток заказчик договорился с охранниками о следующем: все они укажут отрезки времени своих предполагаемых дежурств с единственным условием, чтобы их объединение составляло заданные 5 суток, а он выберет из этих отрезков любой набор, удовлетворяющий тому же условию, и оплатит работу из расчета 500 руб. в час каждому дежурному. Какая наименьшая сумма денег, заранее подготовленная заказчиком, позволит ему наверняка расплатиться с охранниками?

7. В правильную треугольную призму  $ABCA_1B_1C_1$  вписан шар радиуса  $\sqrt{2}$ . Найдите площадь боковой поверхности вписанного в шар прямого кругового цилиндра, основание которого лежит в плоскости, проходящей через точку  $A$  и середины ребер  $BB_1$  и  $CC_1$ .

8. Прямоугольная таблица состоит из 5681 одинаковой клетки. Петя и Вася пронумеровали клетки натуральными числами 1, 2, ..., 5681 подряд. Петя нумеровал клетки по строкам слева направо (сначала первую строку, затем вторую и т. д.), а Вася – по столбцам сверху вниз (сначала первый столбец, затем второй и т. д.). Оказалось, что ровно в 5 клетках их номера совпали. Чему равна сумма числа строк и числа столбцов в этой таблице?

## МЕХАНИКА И МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

### *Отборочный этап*

1. Эйфелева башня имеет высоту 324 м и весит 10000 тонн. Сколько килограммов будет весить ее копия, имеющая высоту 1,62 м?

2. За то время, в течение которого медленно движущийся товарный поезд преодолел 1200 м, школьник успел проехать на велосипеде вдоль железнодорожных путей из хвоста движущегося поезда в его начало и обратно к хвосту. При этом счетчик пройденного пути велосипеда показал, что велосипедист проехал 1800 м. Найдите длину поезда (в метрах).



3. Пришедшие в гости к Гавриле друзья заняли все находившиеся в комнате трехногие табуретки и четырехногие стулья, а самому Гавриле места не хватило. Гаврила посчитал, что ног в комнате оказалось 45, включая «ноги» табуреток и стульев, ноги пришедших гостей (по две у каждого!) и две ноги самого Гаврилы. Сколько людей было в комнате?

4. Железнодорожный состав длиной  $L = 600$  м, двигаясь по инерции, въезжает на горку с углом наклона  $\alpha = 30^\circ$  и останавливается, когда на горке находится ровно четверть состава. Какова была начальная скорость состава  $V$  (в км/ч)? В качестве ответа приведите ближайшее к величине найденной скорости целое число. Трение не учитывать, ускорение свободного падения считать равным  $g = 10$  м/с<sup>2</sup>.

5. Граната, лежащая на земле, разрывается на множество мелких одинаковых осколков, которые разлетаются в радиусе  $L = 90$  м. Определите промежуток времени (в секундах) между моментами падения на землю самого первого и самого последнего осколка, если такая граната взорвется в воздухе на высоте  $H = 10$  м. Ускорение свободного падения считать равным  $g = 10$  м/с<sup>2</sup>. Сопротивление воздуха не учитывать.

6. В вертикальный цилиндрический сосуд с поперечным сечением  $S = 10$  см<sup>2</sup>, содержащий один моль одноатомного идеального газа, поступает за одну секунду количество теплоты  $q = 500$  Дж. Сосуд закрыт сверху тяжелым поршнем весом  $P = 100$  Н. С какой скоростью (в метрах в секунду) поднимается вверх этот поршень, если атмосферное давление  $p_0 = 10^5$  Па?

#### *Заключительный этап*

1. Приборы показали, что юго-западный ветер дует под углом  $60^\circ$  к меридиану со скоростью 10 м/с. С какой собственной скоростью должен лететь самолет, чтобы за полтора часа пролететь в северном направлении вдоль меридиана 900 км? Дайте как точный ответ (в км/ч), так и ответ, округленный до ближайшего целого числа.

2. С борта неподвижного аэростата, находящегося на некоторой высоте над плоской поверхностью, производится наблюдение над тремя лежащими на этой поверхности объектами:  $A$ ,  $B$  и  $C$ . При этом все три угла, под которыми видны с аэростата три отрезка  $AB$ ,  $BC$  и  $AC$ , — прямые. Может ли расстояние между объектами  $A$  и  $B$  быть равным 24 км, если расстояние между  $B$  и  $C$  равно 12 км, а расстояние между  $A$  и  $C$  равно 20 км? Укажите все значения, которые может принимать расстояние между объектами  $A$  и  $B$ .

3. Хитрый волк, засевший в 20 метрах севернее и в 10 метрах восточнее могучего дуба, в момент времени  $t = 0$  заметил зайца в 20 метрах севернее от себя. Волк знает, что заяц движется по закону:  $x = x_0 + at$ ,  $y = y_0 + bt^2$ , где начало системы координат – могучий дуб, ось  $x$  направлена на восток, ось  $y$  – на север, расстояния  $x$ ,  $x_0$ ,  $y$ ,  $y_0$  измеряются в метрах,  $t$  – время в секундах,  $a = 12$  м/с,  $b = 1$  м/с<sup>2</sup>. Произведя мгновенный расчет, волк стартовал и побежал строго по прямой с постоянной скоростью 15 м/с без поворотов и остановок. Есть ли у него возможность поймать зайца? Если да, то через какое время он это сделает?

4. Жители дома решили построить во дворе ледяную горку для детей. Склон горки прямолинейный и настолько длинный, что, разогнавшись, санки двигаются по склону с постоянной скоростью, определяемой балансом силы тяжести и силы сопротивления, направленной против вектора скорости. Каким следует выбрать угол наклона склона горки к горизонту, чтобы горизонтальная составляющая скорости санок была наибольшей? Считать, что сила сопротивления движению пропорциональная второй степени скорости санок.

5. Старшеклассник в школьной лаборатории проводил испытания с небольшой порцией идеального одноатомного газа. Оборудование позволяло совершать только изобарный и изохорный процессы так, что давление и объем могли меняться только в целое число раз. Ему удалось заставить газ совершить замкнутый цикл, КПД которого оказался равен  $\frac{8}{33}$ . Какое максимальное значение может принимать отношение максимального объема к минимальному в этом цикле.

6. Движение точки вдоль прямой фиксируется фотоаппаратом со стробоскопом, дающим ежесекундно вспышки, первая из которых синхронизирована с началом движения точки. При анализе фотоснимков ввели координату точки  $x(t)$ ,  $t \geq 0$ ,  $x(0) = 0$  и установили, что за каждый секундный промежуток между вспышками изменение координаты точки прямо пропорционально такому изменению за предыдущий промежуток между вспышками. Кроме того, через  $n$  секунд после начала движения (т.е. в момент  $(n+1)$ -й вспышки) оказалось, что  $x(n) = n \cdot x(1)$ .

а) При каких натуральных значениях  $n$  из приведенных выше условий следует, что за каждый промежуток между вспышками изменение координаты точки одинаково?

б) При каких натуральных  $n$  существует движение точки, отличное от описанного в пункте а)?

## ФИЗИКА

В 2013/14 учебном году олимпиада «Ломоносов» по физике проводилась в два этапа – отборочный и заключительный.

### Отборочный этап

Отборочный этап проходил в форме заочного испытания. На этом этапе каждый ученик 10 или 11 класса мог участвовать по собственному выбору в одном, двух или трех турах, проводимых по единой форме и с равноценными заданиями. Задания олимпиады были размещены в интернете на сайте <http://olymp.msu.ru>. Доступ к условиям заданий был открыт для участников трижды: с 21 по 24 ноября 2013 года (1-й тур), с 16 по 19 декабря 2013 года (2-й тур) и с 19 по 22 января 2014 года (3-й тур). Прием решений и ответов по каждому из туров прекращался одновременно с их завершением. После прохождения всех туров олимпиады каждый участник до 29 января 2014 года должен был самостоятельно определить номер тура, который для него является официальным.

Для учеников 7–9 классов отборочный этап проводился в один тур с 21 ноября 2013 года по 19 января 2014 года.

Победители и призеры отборочного этапа были приглашены для участия в заключительном этапе олимпиады.

Ниже приводятся примеры заданий для участников отборочного тура олимпиады.

### 7–9 классы

1. Рабочий затаскивает вверх по наклонному трапу ящик массой  $m = 90$  кг, прикладывая к нему силу, направленную параллельно трапу и равную  $F = 500$  Н (рис.1). Трап образу-

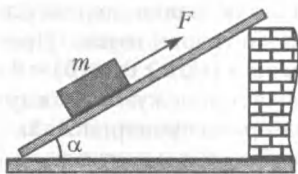


Рис. 1

ет с горизонтом угол  $\alpha = 30^\circ$ , а движение ящика происходит с постоянной скоростью. Найдите коэффициент полезного действия  $\eta$  используемого рабочим трапа. Ускорение свободного падения примите равным  $g = 10 \text{ м/с}^2$ . Ответ приведите в процентах, округлив до целого значения.

2. На горизонтальном дне сосуда, доверху заполненного водой, лежит тело, имеющее форму полушара радиусом  $R = 10$  см, причем под нижнюю плоскую поверхность тела вода не подтекает. С какой силой  $N$  тело давит на дно сосуда, если масса

тела  $m = 2$  кг, а глубина сосуда  $h = 30$  см? Плотность воды считайте равной  $\rho = 1 \text{ г/см}^3$ , а ускорение свободного падения  $g = 10 \text{ м/с}^2$ . Атмосферное давление не учитывайте. Ответ округлите до целого значения.

**Указание.** Объем шара радиусом  $R$  равен  $V = \frac{4}{3}\pi R^3$ , площадь круга того же радиуса равна  $S = \pi R^2$ .

3. Между свободными концами двух последовательно соединенных резисторов поддерживается постоянное напряжение  $U = 10$  В (рис.2). Сопротивление одного из резисторов равно  $r = 1$  Ом, а сопротивление  $R$  второго подобрано таким, что на нем выделяется мощность, максимально возможная при данном значении  $r$ . Определите мощность  $P$ , выделяющуюся при этом на резисторе сопротивлением  $r$ .

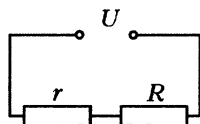


Рис. 2

4. На главной оптической оси тонкой собирающей линзы  $L$  расположен отрезок тонкой светящейся нити длиной  $l = 2$  см (рис.3). Дальний от линзы конец нити совпадает с фокусом линзы. Фокусное расстояние линзы  $F = 10$  см, а ее диаметр  $d = 8$  мм. По другую сторону за линзой на расстоянии  $L = 20$  см от нее перпендикулярно ее главной оптической оси расположен экран  $\mathcal{E}$ . Определите диаметр  $D$  светлого пятна на экране. Ответ выразите в миллиметрах.

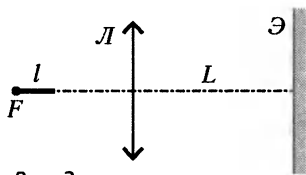


Рис. 3

5. Ветер донес до волка, затаившегося в точке  $A$ , запах зайца, лежка которого расположена в точке  $B$ , находящейся от точки  $A$  на расстоянии  $L = 1,3$  км (рис.4). Проголодавшийся волк

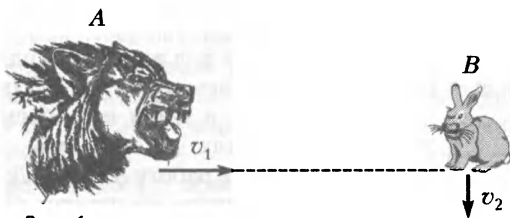


Рис. 4

осторожно двинулся по направлению от точки  $A$  к точке  $B$  со скоростью  $v_1 = 2 \text{ м/с}$ . Через  $t_0 = 1$  мин после этого заяц, почуяв неладное, начал уходить от своей лежки в перпендикулярном направлении со скоростью  $v_2 = 1 \text{ м/с}$ . Считая, что направления

движения и скорости волка и зайца неизменны, найдите, через какое время  $t_1$  после начала движения волка расстояние между волком и зайцем будет минимальным. Ответ приведите в секундах.

6. Мальчик выстрелил из пневматического пистолета маленьким шариком, направив ствол пистолета вертикально вверх. Спустя время  $\tau = 8,7$  с шарик вернулся в точку, откуда был произведен выстрел, имея в момент падения скорость  $u_2 = 37$  м/с. Какова скорость  $u_1$ , с которой шарик вылетел из ствола пистолета, если сила сопротивления воздуха пропорциональна скорости шарика? Ускорение свободного падения примите равным  $g = 10$  м/с<sup>2</sup>.

10–11 классы

*Первый тур*

1. Стоящий на горизонтальном льду мальчик массой  $M = 30$  кг бросает в горизонтальном направлении камень массой  $m = 3$  кг. Определите коэффициент трения  $\mu$  мальчика о лед, если после броска мальчик откатился на расстояние  $L = 0,5$  м, а модуль скорости камня относительно земли в момент броска был равен  $u = 10$  м/с. Влиянием силы трения во время броска можно пренебречь. Модуль ускорения свободного падения считайте равным  $g = 10$  м/с<sup>2</sup>.

2. Железный кубик массой  $m = 50$  г удерживают неподвижным на горизонтальной плоскости в положении, показанном на рисунке 5, с помощью натянутой горизонтально легкой нити, расположенной в вертикальной плоскости, проходящей через центр масс кубика. Определите модуль  $F$  силы, действующей на кубик со стороны плоскости, если угол  $\alpha = 15^\circ$ . Модуль ускорения свободного падения считайте равным  $g = 10$  м/с<sup>2</sup>.

3. Находившийся в объеме  $V_1 = 5$  л идеальный одноатомный газ массой  $m = 0,8$  г под давлением  $p_1 = 0,1$  МПа изохорно нагрели, а затем его объем изобарно уменьшили до величины  $V_3 = 3$  л, совершив работу  $A = 400$  Дж. Определите разность температур газа в конечном и начальном состояниях. Молярная масса газа  $M = 4$  г/моль, а универсальная газовая постоянная  $R = 8,31$  Дж/(моль · К). Ответ округлите до целых.

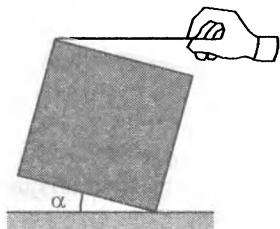


Рис. 5

4. Два одинаковых плоских конденсатора соединены последовательно и подключены к батарее. Между пластинами конденсаторов находится воздух. Емкость каждого конденсатора  $C = 100$  пФ, ЭДС батареи  $\mathcal{E} = 10$  В, а ее внутреннее сопротивление  $r = 10$  Ом. Определите максимальное количество теплоты  $Q$ , которое может выделиться в батарее после заполнения одного из конденсаторов диэлектриком с проницаемостью  $\epsilon = 2$ . Ответ выразите в наноджоулях.

5. На переднюю грань находящейся в воздухе плоскопараллельной прозрачной пластинки с показателем преломления  $n = 1,5$  падает сходящийся конический пучок света с углом при вершине  $2\alpha = 60^\circ$ . Ось пучка перпендикулярна плоскости пластинки. Радиус освещенного пятна на передней грани пластинки  $R = 4$  см. Определите минимальную толщину  $h$  пластинки, при которой радиус светлого пятна на задней ее грани будет в  $k = 2$  раза меньше  $R$ . Ответ приведите в сантиметрах, округлив до двух знаков после запятой.

### Второй тур

1. Человек массой  $m = 60$  кг стоит в середине квадратного пласта массой  $M = 200$  кг и площадью  $S = 4$  м<sup>2</sup>, неподвижно плавающего на поверхности воды. На какое расстояние  $x$  переместится пласт, если человек медленно перейдет в угол пласта? Сопротивлением воды можно пренебречь. Ответ приведите в сантиметрах, округлив до целых.

2. Доска массой  $m = 10$  кг лежит на горизонтальном полу, а на ней стоит ящик массой  $M = 50$  кг (рис.6). Коэффициент трения между доской и полом  $\mu_1 = 0,2$ , а между ящиком и доской  $\mu_2 = 0,6$ . Доску и ящик приводят в движение, прикладывая к доске горизонтальную



Рис. 6

силу, направленную вдоль продольной оси доски. При каком максимальном значении модуля  $F$  этой силы ящик не будет скользить по доске? Ускорение свободного падения примите равным  $g = 10$  м/с<sup>2</sup>.

3. В прочном сосуде объемом  $V = 100$  л находится смесь из  $\nu_1 = 0,05$  моль водорода и  $\nu_2 = 1$  моль сухого воздуха. С помощью электрической искры смесь поджигают. Найдите относительную влажность  $\phi$  воздуха в сосуде после сгорания водорода и охлаждения содержимого сосуда до температуры  $t = 20^\circ\text{C}$ . Давление насыщенного водяного пара при этой температуре  $p_n = 2,33$  кПа. Массовая доля кислорода в воздухе состав-

ляет примерно 23%. Универсальная газовая постоянная  $R = 8,31 \text{ Дж}/(\text{моль} \cdot \text{К})$ . Ответ приведите в процентах, округлив до целых.

4. Достаточно длинная гладкая пластмассовая трубка, закрытая с обоих концов, заполнена газом. В трубке находится маленький гладкий шарик, несущий электрический заряд  $q = 50 \text{ нКл}$ . Трубку поместили в барокамеру, из которой откачан воздух и в которой создано постоянное однородное магнитное поле с индукцией, направленной вертикально и равной по модулю  $B = 1 \text{ Тл}$ . Трубку расположили горизонтально и начали ее двигать поступательно, направив вектор ее скорости перпендикулярно и трубке, и вектору магнитной индукции. Какую мощность  $N$  необходимо затрачивать, чтобы обеспечить движение трубки с постоянной скоростью  $v_0 = 1 \text{ м/с}$  начиная с того момента, когда движение шарика относительно трубки станет установившимся? Считайте, что модуль силы вязкого трения, действующей на шарик со стороны газа, пропорционален скорости  $u$  шарика относительно трубки, т.е.  $F_{\text{сопр}} = \alpha u$ . Коэффициент пропорциональности примите равным  $\alpha = 10^{-3} \text{ Н} \cdot \text{с/м}$ . Ответ приведите в пиковаттах, округлив до одного знака после запятой.

5. Параллельный пучок света радиусом  $r = 2 \text{ см}$  падает на собирающую линзу с фокусным расстоянием  $F = 50 \text{ см}$  параллельно ее главной оптической оси. За линзой находится плоскопараллельная стеклянная пластина толщиной  $h = 10 \text{ мм}$ , установленная перпендикулярно главной оптической оси линзы. Расстояние от линзы до ближайшей к ней грани пластины  $l = 70 \text{ см}$ . Показатель преломления стекла  $n = 1,5$ . Найдите радиус  $R$  светового пучка на выходе из пластины. Ответ приведите в миллиметрах, округлив до одного знака после запятой.

### Третий тур

1. Два бруска покоятся на гладкой горизонтальной плоскости. Между ними находится сжатая пружина, связанная нитью (рис.7). После пережигания нити пружина полностью распрямляется, и бруски начинают двигаться поступательно со скоростями  $v_1 = 4 \text{ м/с}$  и  $v_2 = 2 \text{ м/с}$ . Вычислите

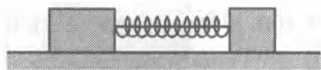


Рис. 7

энергию  $E_{\text{п}}$ , которая была запасена в пружине, если известно, что суммарная масса брусков  $M = 6 \text{ кг}$ . Пружину считайте невесомой.

2. На гладкой горизонтальной поверхности дна тележки находится груз, прикрепленный к передней стенке тележки с помощью пружины (рис.8). Тележку двигают с постоянным ускорением  $a = 5 \text{ м/с}^2$ , причем груз неподвижен относительно тележки. Достигнув скорости  $v = 1 \text{ м/с}$ , тележка резко останавливается, наткнувшись на препятствие, и остается неподвижной. При этом возникают гармонические колебания груза с периодом  $T = 1 \text{ с}$ . Найдите амплитуду  $A$  этих колебаний. Ответ приведите в сантиметрах, округлив до одного знака после запятой.

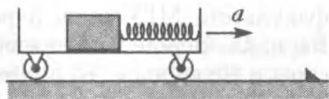


Рис. 8

3. В теплоизолированный сосуд с малой теплоемкостью, содержащий спирт при температуре  $t = 45^\circ\text{C}$ , опустили стальной кубик с длиной ребра  $a = 1 \text{ см}$ , имеющий температуру  $t_0 = 15^\circ\text{C}$ . Спустя некоторое время в сосуде установилось тепловое равновесие при температуре  $t_1 = 35^\circ\text{C}$ . Затем в сосуд положили второй стальной кубик с длиной ребра  $b = 2 \text{ см}$ . После этого в сосуде установилось тепловое равновесие при температуре  $t_3 = 40^\circ\text{C}$ . Определите начальную температуру  $t_2$  второго кубика. Ответ приведите по шкале Цельсия, округлив до одного знака после запятой.

4. Батарея, замкнутая на сопротивление  $R_1 = 90 \text{ Ом}$ , обеспечивает ток в цепи  $I_1 = 0,1 \text{ А}$ . Если батарею замкнуть на сопротивление  $R_2 = 40 \text{ Ом}$ , то в цепи потечет ток  $I_2 = 0,2 \text{ А}$ . Какой ток  $I_3$  будет течь через сопротивление  $R_3 = 10 \text{ Ом}$ , если его подключить к двум таким же батареям, соединенным параллельно? Ответ округлите до двух знаков после запятой.

5. Оптическая система состоит из собирающей линзы с фокусным расстоянием  $F_1 = 20 \text{ см}$  и рассеивающей линзы с фокусным расстоянием, модуль которого  $F_2 = 30 \text{ см}$ . Главные оптические оси этих линз совмещены друг с другом, а расстояние между линзами  $l = 5 \text{ см}$ . На собирающую линзу падает параллельный пучок света, ось которого совпадает с главной оптической осью линзы. Определите, на какое расстояние  $\Delta x$  сместится точка, в которую будет сфокусирован пучок после прохождения системы линз, если линзы поменять местами. Ответ приведите в сантиметрах, округлив до одного знака после запятой.

#### Заключительный этап

Заключительный этап олимпиады «Ломоносов» по физике был назначен на 28 февраля 2014 года. Для учащихся всех классов этот этап проводился в очной форме на физическом



факультете МГУ и на 8 региональных площадках в городах Барнаул, Воронеж, Кисловодск, Саров, Таганрог, Уфа, Чебоксары и Челябинск. Кроме того, по желанию ряда учеников 7–9 классов выполнение заданий заключительного этапа было организовано в школах по месту их проживания.

Задания для учащихся 10–11 классов были составлены в полном соответствии с Кодификатором элементов содержания и требований к уровню подготовки выпускников общеобразовательных учреждений для единого государственного экзамена 2014 года по физике и охватывали основные разделы Кодификатора, а именно: 1) механику, 2) молекулярную физику и термодинамику, 3) электродинамику и 4) оптику. Типовое задание состояло из четырех различных разделов, включающих краткие вопросы по теории и дополняющие их задачи. В первом разделе были помещены задания по механике, во втором разделе – задания по молекулярной физике и термодинамике, в третьем разделе – задания по электродинамике, в четвертом разделе – задания по оптике

Ниже приводятся задания заключительного этапа олимпиады.

#### 7–9 классы

1. Снаряд, летевший со скоростью, модуль которой  $v = 50$  м/с, разорвался на три осколка, два из которых имели одинаковые массы  $m = 20$  кг каждый, а масса третьего осколка была в два раза больше. В результате взрыва суммарная кинетическая энергия осколков непосредственно после взрыва увеличилась на  $\Delta E_k = 3,6$  МДж. Считая, что осколки после взрыва летят поступательно и модули скоростей легких осколков равны друг другу, определите модуль  $v_3$  максимально возможной скорости тяжелого осколка непосредственно после взрыва.

2. Стоявшую на столе в комнате длительное время открытую банку объемом  $V = 3$  л герметически закрыли и поместили в холодильник. Температура воздуха в комнате  $t_k = 20^\circ\text{C}$ , а его относительная влажность  $\phi = 60\%$ . Определите массу  $m$  льда, который образуется в банке через достаточно большой промежуток времени после этого. В холодильнике поддерживается температура  $t_x = -10^\circ\text{C}$ . Плотность насыщенных паров воды при температуре  $t_k$  равна  $\rho_k = 17,32$  г/м<sup>3</sup>, а при температуре  $t_x$  она равна  $\rho_x = 2,14$  г/м<sup>3</sup>.

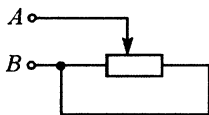


Рис. 9

3. Сопротивление обмотки реостата  $r = 16$  Ом, длина реостата  $L = 20$  см. Найдите

те сопротивление  $R$  цепи между точками  $A$  и  $B$  (рис.9), если движок реостата находится на расстоянии  $x = 5$  см от его левого конца.

4. Высота Солнца над горизонтом составляет угол  $\alpha = 32^\circ$ . Под каким углом  $\beta$  к горизонту следует расположить плоское зеркало для того, чтобы осветить солнечными лучами дно глубокого вертикального колодца?

10–11 классы

1. Чему равны сила трения покоя и сила трения скольжения? Дайте определение коэффициента трения.

*Задача.* Олимпийская трасса для соревнований по бобслею в Сочи имеет перепад высот от старта до финиша  $h = 132$  м. На стартовом горизонтальном участке («полоса разгона»; рис.10)

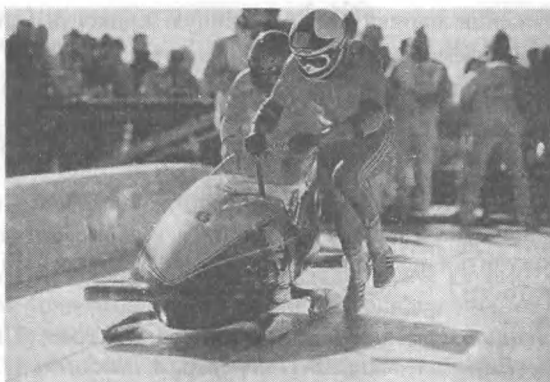


Рис. 10

спортсмены разогнали боб до скорости  $v_0 = 6$  м/с, с которой пересекли линию старта. В конце спуска по ледяному желобу сразу после финиша используется специальное тормозное устройство для гашения скорости боба на горизонтальной поверхности. При этом коэффициент трения на участке торможения увеличивается пропорционально расстоянию  $x$  от линии финиша по закону  $\mu(x) = \alpha x$ , где  $\alpha$  – некоторый постоянный коэффициент. Определите скорость  $u$  боба в тот момент, когда он пройдет половину тормозного пути. Примите, что на участке трассы от конца полосы разгона до финиша за счет сил трения было потеряно  $\eta = 20\%$  механической энергии боба. Ускорение свободного падения считайте равным  $g = 10$  м/с<sup>2</sup>. Ответ приведите в м/с с точностью до десятых.

**2.** Какие виды парообразования вы знаете? Дайте определение удельной теплоты парообразования.

*Задача.* В цилиндре под поршнем при температуре  $t = 100\text{ }^{\circ}\text{C}$  находится воздух с относительной влажностью  $\varphi = 0,5$  под давлением  $p_0 = 1,5$  атм. Объем воздуха изотермически уменьшили настолько, что  $n = \frac{1}{2}$  массы имевшегося первоначально в цилиндре водяного пара сконденсировалась. Определите давление  $p_k$ , установившееся при этом под поршнем.

**3.** Сформулируйте закон Кулона. Дайте определение напряженности электрического поля.

*Задача.* Маленький шарик, несущий некоторый положительный заряд, подвешен на тонкой непроводящей нити и находится в однородном электрическом поле, созданном протяженной заряженной плоскостью, расположенной вертикально. При полном погружении шарика в непроводящую жидкость с диэлектрической проницаемостью  $\epsilon = 3$  и плотностью  $\rho_0 = 0,8\text{ г/см}^3$  оказалось, что угол отклонения нити от вертикали не изменился. Определите плотность  $\rho$  материала шарика.

**4.** Дайте определение светового луча. Сформулируйте закон прямолинейного распространения света.

*Задача.* Расстояние от предмета до экрана  $L = 1$  м. Какое максимальное увеличение  $\Gamma_{\max}$  изображения предмета на экране можно получить с помощью тонкой линзы с фокусным расстоянием  $F = 16$  см?

*Публикацию подготовили А.Зеленский, А.Козко, Л.Крицков,  
Е.Могилевский, В.Панфёров, А.Разборов, И.Сергеев,  
С.Чесноков, И.Шейтак, М.Юмашев*

## ОЛИМПИАДА «ПОКОРИ ВОРОБЬЕВЫ ГОРЫ!»

### МАТЕМАТИКА

В соответствии с Порядком проведения олимпиад школьников олимпиада «Покори Воробьевы горы!» по математике проводилась в 2013/14 учебном году в два этапа: отборочный и заключительный. Отборочный этап проводился с ноября 2013 года по январь 2014 года и впервые осуществлялся в режиме «онлайн». После регистрации на официальном сайте олимпиады <http://mk.ru/msu> каждый участник получал доступ к комплектам заданий, причем конкретные варианты задач комплекта формировались случайным образом. На прохождение отборочного тура участникам предоставлялось три попытки (с интервалом примерно в один месяц); комплекты задач для каждой попытки полностью обновлялись, и после завершения третьей попытки участник мог самостоятельно выбрать наиболее удачный результат для зачета в качестве окончательного. Победители и призеры отборочного этапа приглашались к участию в заключительном (очном) этапе, который проводился в марте 2014 года в Москве и ряде городов России.

Ниже приведены задания, предлагавшиеся учащимся выпускных классов в 2013/14 учебном году.

#### *Отборочный этап*

В каждой из трех попыток участникам предлагалось по десять задач, из которых для первых пяти задач необходимо было выбрать правильный ответ из нескольких, а для последних пяти предлагалось ввести ответ на сайте, а затем прислать через свой интернет-кабинет участника подробное решение. Ниже приведены избранные варианты заданий каждой попытки.

#### **Ноябрь 2013 года**

1. Прямая, параллельная выделенной стороне треугольника площади 16, отсекает от него треугольник площади 9. Найдите площадь четырехугольника, три вершины которого совпадают с

вершинами меньшего треугольника, а четвертая лежит на выделенной стороне.

## 2. Вычислите

$$\frac{y^2 + xy - \sqrt[4]{x^5 y^3} - \sqrt[4]{xy^7}}{\sqrt[4]{y^5} - \sqrt[4]{x^2 y^3}} \cdot (\sqrt[4]{x} + \sqrt[4]{y}),$$

где

$$x = 3, \underbrace{22 \dots 2}_{2013} 3, \quad y = 4, \underbrace{77 \dots 7}_{2014}.$$

3. Сколькими способами тренер может скомплектовать хоккейную команду, состоящую из одного вратаря, двух защитников и трех нападающих, если в его распоряжении есть 2 вратаря, 5 защитников и 8 нападающих?

4. Определите, сколько существует различных значений  $a$ , при которых уравнение  $(1 - a^2)x^2 + ax + 1 = 0$  имеет единственное решение.

5. Продукт, содержащий первоначально 99% воды, за некоторое время высох и стал содержать 97% воды. Во сколько раз он усох (т.е. уменьшил свой вес)?

6. Найдите количество корней уравнения

$$3^{(3 \sin x - 2)/(2 \sin x - 1)} - 2 = 3^{(1 - \sin x)/(2 \sin x - 1)},$$

принадлежащих отрезку  $[-\pi/2; 13\pi]$ .

7. В прямоугольном треугольнике  $ABC$  угол  $C$  прямой. На стороне  $AC$  как на диаметре построена окружность. Из вершины  $B$  проведена касательная к окружности, отличная от  $BC$ , и  $D$  – точка касания. Точка  $H$  является основанием перпендикуляра, проведенного из точки  $D$  на сторону  $AC$ . Найдите отношение  $DE:EH$ , где  $E$  – точка пересечения  $DH$  и  $AB$ .

8. Найдите сумму корней уравнения принадлежащих отрезку  $[\pi; 2\pi]$ . В ответе укажите целое число, наиболее близкое к найденной сумме.

9. Три сестры пришли на рынок и продавали поштучно цыплят. Первая принесла 12 цыплят, вторая – 18, третья – 32 цыпленка. Каждая из них часть товара продала утром, а часть – вечером. Утренняя цена одного цыпленка была у всех сестер одинаковая, и вечерняя цена тоже одинаковая, но более низкая (положительная). К вечеру весь товар был распродан, и дневная выручка (за утро и вечер) у всех сестер оказалась одинаковой: 1700 руб. Найдите суммарную вечернюю выручку (в рублях) всех сестер.

10. Найдите все значения  $a > 0$ , при которых существуют положительные решения неравенства

$$\frac{x^3}{a + 2013^{4/3}x} + \frac{2013^{4/3}x}{a + x^3} \leq \frac{3}{2} - \frac{a}{x(x^2 + 2013^{4/3})}.$$

В ответе укажите сумму всех найденных целых значений  $a$ .

### Декабрь 2013 года

1. Найдите наибольший отрицательный корень уравнения  $\sin 2\pi x = \sqrt{3} \sin \pi x$ .

2. Дневная смена мастера длится на 10% дольше, чем смена ученика. Если бы ученик работал столько времени, сколько мастер, а мастер – столько, сколько ученик, они изготовили бы одинаковое количество деталей. На сколько процентов деталей в день делает мастер больше, чем ученик?

3. Найдите сумму всех двузначных чисел, у каждого из которых сумма квадратов цифр на 37 больше произведения тех же цифр.

4. Отрезок, соединяющий боковые стороны трапеции и параллельный ее основаниям, равным 3 и 21, делит трапецию на две части равной площади. Найдите длину этого отрезка.

5. Найдите сумму всех целых значений аргумента  $x$ , при которых соответствующие значения функции  $y = x^2 + x(\log_2 18 - \log_3 12) - \log_3 16 - 4 \log_2 3$  не превосходят 8.

6. Три пирата Джо, Билл и Том нашли клад, содержащий 70 одинаковых золотых монет, и хотят разделить их так, чтобы каждому из них досталось не менее 10 монет. Сколько существует способов это сделать?

7. Найдите сумму цифр числа

$$\sqrt{\frac{111\dots 11}{2014} - \frac{22\dots 2}{1007}}.$$

8. Укажите целое число, ближайшее к большему из корней уравнения

$$\arctg\left(\left(\frac{2x}{7} + \frac{7}{8x}\right)^2\right) - \arctg\left(\left(\frac{2x}{7} - \frac{7}{8x}\right)^2\right) = \frac{\pi}{4}.$$

9. В треугольной пирамиде  $SABC$  ребра  $SB$ ,  $AB$  перпендикулярны и  $\angle ABC = 120^\circ$ . Точка  $D$  на ребре  $AC$  такова, что отрезок  $SD$  перпендикулярен по меньшей мере двум медианам треугольника  $ABC$  и  $CD = AB = 44\sqrt[3]{4}$ . Найдите  $AD$ .

10. Для функции  $f(x) = 2008 - x^3 - 4x - a + \sin \pi x$  найдите количество целых значений  $a$ , при каждом из которых уравнение

$f(f(\dots f(x)\dots)) = x$  (функция  $f$  применяется 2013 раз) на отрезке  $[99; 101]$  имеет единственное решение.

### Январь 2014 года

1. Петя заметил, что поезд прошел мимо него за 25 секунд, а мост длиной 60 метров – за 28 секунд. Найдите скорость поезда (в метрах в секунду), считая, что она остается одной и той же в течение всего времени наблюдения.

2. Найдите  $f(2013)$ , если для любых действительных  $x$  и  $y$  справедливо равенство

$$f(x - y) = f(x) + f(y) - 2xy.$$

3. Вычислите сумму

$$S = \frac{2014}{1 \cdot 5} + \frac{2014}{5 \cdot 9} + \frac{2014}{9 \cdot 13} + \dots + \frac{2014}{2009 \cdot 2013}.$$

В ответе укажите натуральное число, ближайшее к полученному значению  $S$ .

4. Окружность касается сторон угла в точках  $A$  и  $B$ . Расстояния от лежащей на окружности точки  $C$  до сторон угла равны 2 и 8. Найдите расстояние от точки  $C$  до прямой  $AB$ .

5. Решите неравенство

$$\sqrt{3x - 7} - \sqrt{3x^2 - 13x + 13} \geq 3x^2 - 16x + 20.$$

В ответе укажите сумму всех удовлетворяющих неравенству целых значений  $x$ .

6. Из трех математиков и девяти экономистов нужно составить комиссию, в состав которой войдет восемь человек. При этом в ней должен участвовать хотя бы один математик. Сколькими способами может быть составлена комиссия?

7. Найдите делимое, если каждый знак  $*$  в приведенной записи деления чисел «в столбик» обозначает какую-либо цифру:

$$\begin{array}{r}
 \begin{array}{l}
 \text{*****} \\
 \text{***} \\
 \hline
 \text{***} \\
 \text{***} \\
 \hline
 \text{**} \\
 \text{**} \\
 \hline
 \text{***} \\
 \text{***} \\
 \hline
 0
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{l}
 \hline
 \text{***8**}
 \end{array}
 \begin{array}{l}
 ? \\
 \\
 \\
 \\
 \\
 \\
 \\
 \end{array}
 \end{array}$$

8. Найдите все общие точки графиков  $y = 8 \cos \pi x \cdot \cos^2 2\pi x \cdot \cos 4\pi x$  и  $y = \cos 9\pi x$  с абсциссами, принадлежащими отрезку  $[0; 1]$ . В ответе укажите сумму абсцисс найденных точек.

9. Найдите все положительные  $a$ , при которых уравнение

$$\frac{2\pi a + \arcsin(\sin x) + 2 \arccos(\cos x) - ax}{\operatorname{tg}^2 x + 1} = 0$$

имеет ровно три различных решения, принадлежащих множеству  $(-\infty; 7\pi]$ . В ответе укажите сумму всех найденных  $a$ .

10. В основании пирамиды  $SABCD$  лежит трапеция  $ABCD$  с основаниями  $BC$  и  $AD$ . Точки  $P_1, P_2, P_3$  принадлежат стороне  $BC$ , причем  $BP_1 < BP_2 < BP_3 < BC$ . Точки  $Q_1, Q_2, Q_3$  принадлежат стороне  $AD$ , причем  $AQ_1 < AQ_2 < AQ_3 < AD$ . Обозначим точки пересечения  $BQ_1$  с  $AP_1$ ,  $P_2Q_1$  с  $P_1Q_2$ ,  $P_3Q_2$  с  $P_2Q_3$ ,  $CQ_3$  с  $P_3D$  через  $R_1, R_2, R_3$  и  $R_4$  соответственно. Известно, что сумма объемов пирамид  $SR_1P_1R_2Q_1$  и  $SR_3P_3R_4Q_3$  равна 78. Найдите минимальное значение величины

$$V_{SABR_1}^2 + V_{SR_2P_2R_3Q_2}^2 + V_{SCDR_4}^2.$$

#### Заключительный этап

Варианты, предлагавшиеся участникам заключительного этапа в разных городах России, отличались друг от друга. Здесь приводятся избранные задачи из различных вариантов.

1. Два брата родились в один день, но в разные годы. Оказалось, что в 2014 году каждому из них исполнилось столько лет, какова сумма цифр его года рождения. Определите год рождения каждого из братьев.

2. Найдите все пары натуральных чисел  $x, y$ , удовлетворяющие уравнению  $3xy - y + 3x = 1008$ .

3. Для некоторого натурального  $k$  десятичная запись числа  $k^2 + 6k$  заканчивается цифрой 6. Найдите все значения, которые может принимать предпоследняя цифра этой записи.

4. В периодической десятичной дроби  $0,242424\dots$  первую цифру после запятой заменили на 4. Во сколько раз полученное число больше исходного?

5. Заданы 2014 натуральных чисел. Если выбрать из них любые 100 чисел, то среди них окажется хотя бы одно четное число. Если выбрать из них любые 1916 чисел, то среди них окажется хотя бы одно нечетное число. Может ли сумма всех этих чисел равняться  $2014 \cdot 2013$ ? Ответ обоснуйте.

6. Дана бесконечная числовая последовательность  $a_1, a_2, \dots$ ,



о которой известно следующее:  $a_1 = 20$ ;  $a_{n+1} = a_n \cdot a_{n+2}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ .  
Найдите все значения, которые может принимать  $a_{2014}$ .

7. Общий вес рюкзаков двух туристов за время похода уменьшился на  $12\frac{1}{3}\%$ . При этом вес рюкзака первого туриста уменьшился на 15%, а вес рюкзака второго – на 10%. Известно также, что в конце похода рюкзак второго туриста весил на 1,2 кг больше, чем рюкзак первого туриста в начале похода. Определите первоначальный вес рюкзаков каждого из туристов.

8. Туристический автобус, вмещающий не более 50 человек, привез группу школьников после экскурсии в кафе. Школьники расселись в кафе так, что за несколькими столами оказалось по три девочки и одному мальчику, за другими несколькими столами по два мальчика и по одной девочке и еще за одним столом оказались одна девочка и один мальчик. Какое максимальное количество школьников могло быть на экскурсии, если известно, что девочек в группе в полтора раза больше, чем мальчиков?

9. Решите неравенство

$$\sqrt{9-x} |x^2 - 1| \leq \sqrt{9-x} |x^2 - 10x + 13|.$$

10. Решите неравенство

$$(\log_5 x)^{\log_3 \log_2 x} + (\log_2 x)^{\log_3 \log_5 x} > 2.$$

11. Решите уравнение

$$6 \cos 9x \cos 2x = 1 + 3 \cos 11x + 2 \cos^3 7x.$$

12. Решите уравнение

$$\sin^2 \left( \frac{2013x}{2} \right) \cos^2 (2014x) \sin^2 \left( \frac{2015x}{2} \right) = 1.$$

13. В треугольнике  $ABC$  биссектрисы  $AA_1$ ,  $BB_1$  пересекаются в точке  $O$ . Известно, что  $2AO = 7OA_1$ ,  $BO = 2OB_1$ . Найдите отношение высоты, проведенной из точки  $A$ , к радиусу вписанной в треугольник  $ABC$  окружности.

14. В четырехугольник  $ABCD$  вписана окружность с центром  $O$ , при этом  $\angle AOB = 75^\circ$ ,  $AB = 3$ . Найдите площадь круга, ограниченного описанной вокруг треугольника  $ABE$  окружностью, где  $E$  – точка пересечения прямых  $AD$  и  $BC$ .

15. Треугольник  $ABC$  вписан в окружность с центром в точке  $O$ . Биссектрисы внутренних углов треугольника при вершинах  $A$  и  $B$  пересекают описанную окружность в точках  $A_1$  и  $B_1$  соответственно. Угол между биссектрисами равен  $60^\circ$ . Длина стороны  $AB$  равна 3. Найдите площадь треугольника  $A_1B_1O$ .

**16.** Косинус острого угла прямоугольного треугольника равен  $2/\sqrt{5}$ . Через середины одного катета и гипотенузы провели окружность, касающуюся другого катета. Найдите отношение части гипотенузы, лежащей внутри получившегося круга, ко всей гипотенузе.

**17.** Окружность радиуса  $2\sqrt{3}$  проходит через вершины  $A$  и  $B$  треугольника  $ABC$  и пересекает стороны  $AC$  и  $BC$  в точках  $M$  и  $K$  соответственно. Найдите площадь треугольника  $ABC$ , если  $AB = 6$ ,  $MK = 2\sqrt{3}$ , а центр окружности находится внутри треугольника  $ABC$  на расстоянии 10 от точки  $C$ .

**18.** Найдите все значения параметра  $a$ , при каждом из которых среди решений уравнения  $(a^4 - 2014a^3 + 2014a^2 - 2014a + 2013)x = a^3 + 5a^2 + 2a - 8$  есть неотрицательные числа.

**19.** Найдите все значения  $a$ , при каждом из которых система

$$\begin{cases} y - a^2 + 5(a - 1) = (a^2 - 5a + 6)(x - 3)^6 + \sqrt{(x - 3)^2}, \\ x^2 + y^2 = 2(3x - 4) \end{cases}$$

имеет ровно одно решение.

**20.** Найдите все значения  $a$ , при каждом из которых уравнение  $2 \frac{(x+1)^2}{x^2+1} + a^2 - 4 = 2a \cos\left(\frac{x^2-1}{2x}\right)$  имеет единственное решение.

**21.** Для каждого значения  $a$  решите уравнение

$$4 - \sin^2 x + \cos 4x + \cos 2x + 2 \sin 3x \sin 7x - \cos^2 7x - \cos^2 \pi a = 0.$$

**22.** Найдите все значения  $a$ , при которых расстояние между любыми соседними корнями уравнения  $3 \operatorname{tg} a \cos 2x + 3\sqrt{2} \cos 3a \cos x + 3 \operatorname{tg} a - \operatorname{ctg} a = 0$  меньше либо равно  $\pi/2$ .

**23.** Определите минимальное значение величины  $|x + y|$  при условии, что числа  $x$  и  $y$  удовлетворяют соотношению  $5 \cos(x + 4y) - 3 \cos(x - 4y) - 4 \sin(x - 4y) = 10$ .

**24.** Найдите все значения  $a$ , при которых уравнение

$$\log_2^2\left(\frac{2x}{1+x^2}\right) + 2(a-1)\log_2\left(\frac{x}{1+x^2}\right) + a^2 - a - 2 = 0$$

имеет решение.

**25.** Найдите все значения  $y$ , при каждом из которых ни одно значение  $x$ , удовлетворяющее неравенству  $\log_2(|x| + |y|) \leq 2$ , не удовлетворяет неравенству  $\log_{1/2}(|x| + |y + 4|) \geq -2$ .

**26.** В треугольной пирамиде  $SABC$  ребра  $SA$ ,  $SB$ ,  $SC$  не длиннее, чем 3, 4 и 5, соответственно, а площади граней  $SAB$ ,  $SAC$ ,  $SBC$  не меньше, чем 6,  $15/2$  и 10, соответственно. Найдите объем пирамиды  $SABC$ .

**27.** На основании прямого кругового конуса расположены три попарно касающихся друг друга шара одинакового радиуса. Каждый из них касается также боковой поверхности конуса. Четвертый шар того же радиуса касается первых трех и боковой поверхности конуса. Найдите объем конуса, если радиус окружности, образованной точками касания четвертым шаром боковой поверхности конуса, равен  $\sqrt{2}$ .

**28.** В правильном тетраэдре  $ABCD$  проведено сечение так, что оно проходит через точки  $K$ ,  $L$ ,  $M$ , лежащие на ребрах  $DC$ ,  $DB$ ,  $DA$  соответственно. При этом  $DK : KC = 1 : 3$ ,  $DL : LB = 2 : 1$ ,  $DM : MA = 1 : 1$ . Найдите угол между плоскостями грани  $ABC$  и построенного сечения.

**29.** Одно основание правильной  $n$ -угольной призмы ( $n \geq 3$ ) имеет  $n$  общих точек со сферой радиуса 3; другое основание имеет с этой сферой одну общую точку. Какие значения может принимать объем призмы (при этом значение  $n$  неизвестно)?

*Публикацию подготовили А.Зеленский, А.Козко, Л.Крицков, В.Панфёров, А.Разборов, И.Сергеев, И.Шейтак, М.Юмашев*

# ИНСТИТУТ КРИПТОГРАФИИ, СВЯЗИ И ИНФОРМАТИКИ АКАДЕМИИ ФСБ РОССИИ

## МАТЕМАТИКА

Межрегиональная олимпиада школьников на базе  
ведомственных образовательных учреждений

11 класс

Вариант 1

1. Какое число надо убрать из набора подряд идущих натуральных чисел  $1, 2, 3, \dots, 2013$ , чтобы сумма всех остальных чисел делилась нацело на 2014? Решение обоснуйте.

2. Докажите равенство

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \frac{\pi}{64} + \operatorname{tg} \frac{3\pi}{64} + \operatorname{tg} \frac{5\pi}{64} + \dots + \operatorname{tg} \frac{31\pi}{64} &= \\ &= \frac{1}{\sin \frac{\pi}{32}} + \frac{1}{\sin \frac{3\pi}{32}} + \frac{1}{\sin \frac{5\pi}{32}} + \dots + \frac{1}{\sin \frac{31\pi}{32}}. \end{aligned}$$

3.  $ABCDEF$  – правильный шестиугольник, имеющий зеркальную внутреннюю поверхность. Из точки  $A$  выходит луч света и после двух отражений от сторон шестиугольника (в точках  $M$  и  $N$ ), попадает в точку  $D$  (рис. 1). Найдите тангенс угла  $EAM$ .

4. При возведении двузначного числа в степень 2014 последняя цифра оказалась равна 1, а предпоследняя равна 4. Найдите все такие двузначные числа.

5. Квадратная таблица состоит из 2014 строк и 2014 столбцов. В каждой клетке, находящейся на пересечении строки с номером  $i$  и столбца с номером  $j$ , записано число

$$a_{i,j} = \log_2 \left( 1 - \cos \left( \frac{\pi}{3} (i - j) + \frac{\pi}{2} \right) \right).$$

Найдите сумму всех чисел в таблице.

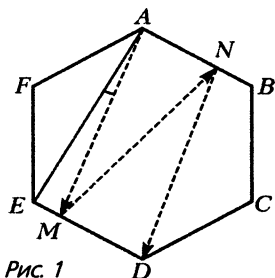


Рис. 1

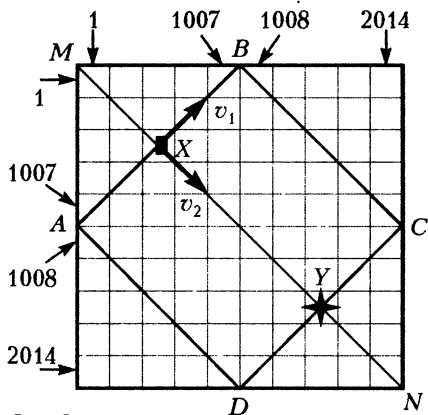


Рис. 2

Из точки  $X$  одновременно начинают двигаться две точки. Первая точка движется со скоростью  $v_1 = 10$  см/с по часовой стрелке по сторонам квадрата  $ABCD$ . Вторая точка начинает двигаться до точки  $N$  и далее курсирует по диагонали  $MN$  исходного квадрата со скоростью  $v_2 = 13$  см/с. Через какое минимальное время они встретятся в точке  $Y$ ?

7. Известно, что четыре прямоугольника с общим прямым углом, изображенные на листе в клетку (рис. 3), имеют размеры  $n \times (n + 2)$  клеток, где  $n$  – некоторое натуральное число.

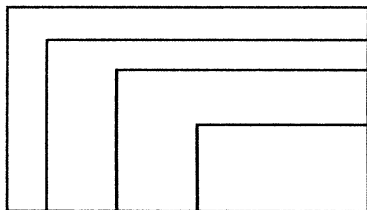


Рис. 3

Докажите, что, делая разрезы только по изображенным линиям, можно вырезать фигуру, количество клеток в которой делится нацело на 12.

8. Несколько самосвалов, стоя в очереди, загружаются поочередно в пункте  $A$  (время

загрузки одно и то же для всех машин) и отвозят груз в пункт  $B$ , там они мгновенно разгружаются и возвращаются в  $A$ . Скорости машин одинаковы, скорость груженой машины составляет  $6/7$  скорости порожней. Первым выехал из  $A$  водитель Петров. На обратном пути он встретил водителя Иванова, выехавшего из  $A$  последним, и прибыл в  $A$  через 6 минут после встречи. Здесь Петров сразу же приступил к загрузке, а по окончании ее выехал в пункт  $B$  и встретил Иванова второй раз через 40 минут после первой встречи. От места второй встречи до  $A$  Иванов ехал не менее 16 минут, но не более 19 минут. Определите время загрузки и количество загружавшихся самосвалов.

*Письменный экзамен*

*Вариант 1*

**1. Сравните числа**

$$(\log_2^2 45 - \log_2 15 \cdot \log_2 135) \text{ и } \log_2^2 3.$$

Решение обоснуйте.

**2. Решите неравенство**

$$|x^2 - 6x - 1| \leq |x^2 - 2x + 1|.$$

**3.** В прямоугольнике  $ABCD$  сторона  $AD$  равна 4. На стороне  $AB$  выбрана точка  $M$  так, что  $AM:MB = 3:1$ . Вторая сторона прямоугольника имеет длину такую, что в четырехугольник  $AMCD$  можно вписать окружность. Найдите расстояние от центра этой окружности до вершины  $B$ .

**4. Решите уравнение**

$$\log_{\sin \frac{\pi x}{2}} \left( 3 \cos \frac{\pi x}{2} - \cos \pi x - 1 \right) = 0.$$

Найдите сумму решений, принадлежащих отрезку  $[0; 100]$ .

**5.** Две трубы подают раствор соли в резервуар (каждая со своей скоростью). Одна из них подает раствор концентрации 5%. Если трубы одновременно наполняют первоначально пустой резервуар, то концентрация раствора получается 7%. Если же половину резервуара будет наполнять одна первая труба, а оставшуюся половину вторая, то концентрация станет 9%. Найдите отношение производительностей (скоростей подачи растворов) этих двух труб.

**6. При каких значениях параметра  $a$  уравнение**

$$x^2(x+1)^2 + ax^2 = 2 - ax$$

имеет ровно два решения?

**ФИЗИКА**

*Межрегиональная олимпиада школьников на базе  
ведомственных образовательных учреждений*

*11 класс*

*Вариант 1*

**1 (3 балла).** Маша поехала кататься с горки на ледянке, которая имела форму треугольника  $ABC$  с тупым углом при вершине  $B$ . Ледянка съехала с горки на ледяной каток и

движется по нему таким образом, что скорость вершины  $A$  направлена вдоль стороны  $AB$ , а скорость вершины  $B$  – вдоль стороны  $BC$ . Считая заданными длины сторон  $AB$  и  $BC$ , а также скорости  $v_A$  и  $v_B$  указанных точек треугольника, определите скорость точки  $C$ .

**2 (4 балла).** При каком отношении  $M/m$  масс призмы  $M$  и цилиндров  $m$  цилиндры начнут раскатываться по горизонтальной поверхности при условии, что между призмой и цилиндрами нет проскальзывания (рис.4)? Коэффициент трения между цилиндрами и поверхностью  $\mu = 0,4$ , угол между боковой гранью призмы и вертикальной осью симметрии  $\alpha = 45^\circ$ .

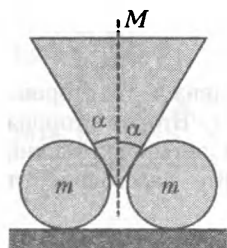


Рис. 4

**3 (3 балла).** Метеорит пробивает в обшивке космического корабля отверстие площадью  $S = 1 \text{ мм}^2$ . Объем жилых помещений корабля  $V = 10^3 \text{ м}^3$ , температура воздуха в них  $t = 27^\circ\text{C}$  при давлении  $p = 10^5 \text{ Па}$ , молярная масса воздуха  $M = 29 \text{ г/моль}$ . Оцените, сколько времени у космонавтов есть в запасе, чтобы надеть скафандры.

**4 (2 балла).** Скорости двух электронов  $v_1$  и  $v_2$  лежат в одной плоскости и при расстоянии  $l = 10 \text{ мкм}$  между электронами образуют углы  $\alpha = 45^\circ$  с прямой, соединяющей электроны. На какое минимальное расстояние сблизятся электроны, если  $v_1 = v_2 = v_0 = 10^4 \text{ м/с}$ ? Заряд электрона  $q = -1,6 \cdot 10^{-19} \text{ Кл}$ , масса  $m = 0,9 \cdot 10^{-30} \text{ кг}$ .

**5 (3 балла).** Определите сопротивление  $R_{AB}$  бесконечной цепи (рис.5), состоящей из периодически повторяющихся элементов. Считать сопротивление  $R$  известным.

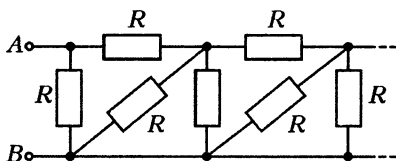


Рис. 5

**6 (2 балла).** Цветное стекло растерто в порошок, который кажется совершенно белым. Как узнать, каков был цвет стекла?

**7 (1 балл).** Зимой на автомобилях ставят колеса с шинами со стальными шипами, что улучшает сцепление колеса с дорогой. Однако при морозах ( $-18^\circ\text{C}$  и ниже) шипы становятся неэффективными. Лучший результат при морозе дают специальные зимние шины с мягкой резиной. Почему?

Вариант 2

1 (3 балла). Две параллельные рейки движутся со скоростями  $v_1$  и  $v_2$  в противоположных направлениях. Между рейками зажат диск радиусом  $R$ . Проскальзывание между диском и рейками отсутствует. Какова угловая скорость вращения диска и какова скорость его центра?

2 (5 баллов). В однородном цилиндре на расстоянии  $l = 2R/3$  от центра параллельно оси Саша просверлил отверстие радиусом  $r = R/4$ , где  $R$  – радиус цилиндра (рис.6). Отверстие он заполнил веществом, плотность которого в  $n = 11$  раз больше плотности вещества цилиндра. Цилиндр лежит на дощечке, которую Саша медленно поднимает за один конец. Каков максимальный угол наклона дощечки, при котором цилиндр еще может находиться на ней в равновесии? Коэффициент трения  $\mu = 0,3$ .

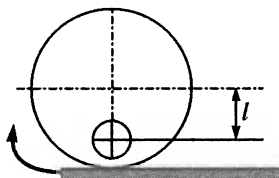


Рис. 6

3 (3 балла). Сосуд, содержащий разреженный газ, разделен на две части пористой перегородкой, пропускаемой для молекул газа, но не проводящей тепло. Среди молекул, испытывающих столкновение с перегородкой, проникающие сквозь перегородку молекулы составляют пренебрежимо малую часть. Стенки каждой из частей сосуда поддерживаются при постоянных, но различных температурах  $T_1 = 50$  К и  $T_2 = 200$  К. Найдите отношение концентраций газа в частях сосуда, разделенных перегородкой, в состоянии равновесия.

4 (2 балла). Точечные заряды  $q_1 = 10$  мкКл,  $Q = 100$  мкКл,  $q_2 = 25$  мкКл расположены на одной прямой, при этом заряд  $Q$  находится между  $q_1$  и  $q_2$ . Расстояние между зарядами  $q_1$  и  $Q$  равно  $r_1 = 3$  см, а между  $q_2$  и  $Q$  оно равно  $r_2 = 5$  см. Какую минимальную работу нужно совершить, чтобы заряды  $q_1$  и  $q_2$  поменять местами?

5 (3 балла). Определите сопротивление  $R_{AB}$  бесконечной цепи, состоящей из периодически повторяющихся элементов (рис.7). Считать сопротивление  $R$  известным.

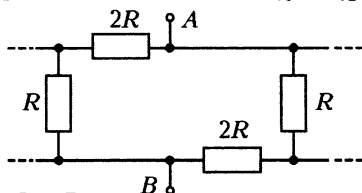


Рис. 7

6 (2 балла). Почему, если смотреть над костром на предметы, находящиеся за ним, очертания предметов кажутся «колеблющимися»?

7 (1 балл). Какой воздух тяжелее: сухой или влажный?



## Письменный экзамен

### Вариант 1

1. Тело движется равномерно по окружности радиусом  $R = 15$  см со скоростью  $v = 10$  м/с. Найдите модуль средней скорости  $v_{\text{ср}}$  за половину периода.

2. Чему равна масса  $m_1$  азота, который содержится в воздухе комнаты объемом  $V = 75$  м<sup>3</sup>, если средняя квадратичная скорость молекул азота равна  $u = 500$  м/с, а концентрация молекул азота в  $\beta = 4$  раза больше концентрации молекул кислорода? Считать, что воздух состоит только из азота и кислорода. Атмосферное давление  $p = 10^5$  Па.

3. Конденсатор неизвестной емкости  $C_1$  заряжен до разности потенциалов  $U_1 = 80$  В. При параллельном подключении этого конденсатора к конденсатору емкостью  $C_2 = 60$  мкФ, заряженному до разности потенциалов  $U_2 = 16$  В, разность потенциалов на батарее становится  $U = 20$  В, если конденсаторы соединить обкладками одного знака. Определите емкость  $C_1$ .

4. Два математических маятника начинают колебаться одновременно. Когда первый маятник совершил  $N_1 = 20$  полных колебаний, второй совершил только  $N_2 = 10$  полных колебаний. Какова длина  $l_1$  первого маятника, если длина второго  $l_2 = 4$  м?

5. Экран расположен на расстоянии  $L = 21$  см от отверстия, в которое вставлена линза радиусом  $r = 5$  см. На линзу падает сходящийся пучок лучей, в результате чего на экране образуется светлое пятно радиусом  $R = 3$  см. Оказалось, что если линзу убрать, то радиус пятна не изменится. Найдите фокусное расстояние линзы.

*Примечание.* В задачах, в которых даны числовые значения, необходимо сначала получить аналитический (буквенный) ответ и только потом использовать численные данные из условия задачи для получения численного ответа.

## XXIII МЕЖРЕГИОНАЛЬНАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ПО МАТЕМАТИКЕ И КРИПТОГРАФИИ

1 (8–9, 10, 11 классы). На соревнованиях беговых роботов было представлено некоторое количество механизмов. Роботов выпускали на одну и ту же дистанцию попарно. В протоколе фиксировались разности времен финиша победителя и побежденного в каждом из забегов. Все они оказались разными: 1 с,

2 с, 3 с, 4 с, 5 с, 6 с. Известно, что в ходе бегов каждый робот соревновался с каждым ровно один раз и что каждый робот всегда бегал с одной и той же скоростью. Определите число представленных на бегах механизмов, а также время прохождения дистанции каждым из них, если лучшее время прохождения дистанции было равно 30 с.

**2 (8–9, 10 классы).** Разблокировка коммуникатора осуществляется вводом 4-значного числового кода на сенсорном экране. На клавиатуре первоначальная расстановка цифр после ввода кода меняется в зависимости от случайного простого числа  $k$  от 7 до 2017 и на месте цифры  $i$  отображается значение  $a_i$ , равное последней цифре числа  $ik$  (рис.8).

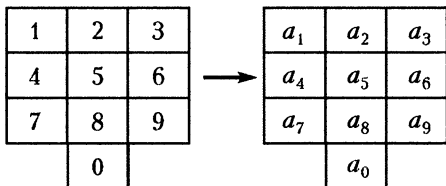


Рис. 8

Пользователь вводит цифры из левой колонки левой рукой, а остальные – правой. Восстановите код блокировки, если известно, что при наборе кода пользователь вводил цифры следующим образом:

при  $a_3 = 3$  : левой, правой, правой, правой;

при  $a_3 = 9$  : правой, правой, левой, левой;

при  $a_3 = 1$  : левой, левой, правой, правой;

при  $a_3 = 7$  : правой, правой, левой, правой.

**3 (11 класс).** Функции  $f_0(x), f_1(x), \dots, f_{10}(x)$  с областью определения  $\{0, 1, 2, 3, 4\}$  и областью значений  $\{0, 1, 2, 3, 4\}$  заданы согласно таблице на рисунке 9. Ответьте на следующие

| $x$ | $f_0(x)$ | $f_1(x)$ | $f_2(x)$ | $f_3(x)$ | $f_4(x)$ | $f_5(x)$ | $f_6(x)$ | $f_7(x)$ | $f_8(x)$ | $f_9(x)$ | $f_{10}(x)$ |
|-----|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|-------------|
| 0   | 0        | 3        | 4        | 3        | 2        | 0        | 0        | 0        | 0        | 0        | 0           |
| 1   | 1        | 0        | 2        | 4        | 3        | 3        | 4        | 3        | 1        | 1        | 1           |
| 2   | 2        | 1        | 0        | 1        | 4        | 1        | 2        | 4        | 4        | 3        | 2           |
| 3   | 3        | 2        | 1        | 0        | 1        | 4        | 1        | 2        | 2        | 4        | 4           |
| 4   | 4        | 4        | 3        | 2        | 0        | 2        | 3        | 1        | 3        | 2        | 3           |

Рис. 9

вопросы: а) для функции  $f(x)$ , заданной равенствами  $f(0) = 1$ ,  $f(1) = 2$ ,  $f(2) = 4$ ,  $f(3) = 0$ ,  $f(4) = 3$ , найдите различные числа  $a, b, c, d \in \{0, 1, \dots, 10\}$  так, чтобы соотношение  $f(x) = f_d(f_c(f_b(f_a(x))))$  выполнялось для всех  $x = 0, 1, 2, 3, 4$ ;

б) докажите, что для любой функции  $f(x)$  с областью определения  $\{0, 1, 2, 3, 4\}$  и областью значений  $\{0, 1, 2, 3, 4\}$ , переводящей разные элементы в разные, найдутся числа  $a, b, c, d \in \{0, 1, \dots, 10\}$  (не обязательно различные), при которых равенство  $f(x) = f_d(f_c(f_b(f_a(x))))$  выполняется для всех  $x = 0, 1, 2, 3, 4$ .

4 (8–9, 10, 11 классы). В таблицу, состоящую из  $n$  строк и  $m$  столбцов, записали числа (не обязательно целые) так, что сумма элементов в каждой строке равна 408, а сумма элементов в каждом столбце равна 340. После чего к таблице приписали  $k$  столбцов, сумма элементов в каждом из которых равна 476, и столбец, сумма элементов в котором равна 272. Получили таблицу, в которой сумма элементов в каждой строке равна 544. Найдите числа  $n, m$  и  $k$ , при которых выражение  $2n - 3m + 6k$  принимает наименьшее возможное натуральное значение. При найденных параметрах  $n, m$  и  $k$  приведите пример указанной таблицы.

5 (8–9, 10, 11 классы). Винтик и Шпунтик используют следующую систему шифрования. Исходный текст, записанный без пробелов, разбивается последовательно на части по 10 букв. В каждой части буквы нумеруются слева направо от 1 до 10 и затем переставляются по правилу, которое задается таблицей на рисунке 10: первая буква каждой части ставится на 7 место,

|   |   |   |   |   |   |   |    |   |    |
|---|---|---|---|---|---|---|----|---|----|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8  | 9 | 10 |
| 7 | 9 | 8 | 1 | 3 | 2 | 4 | 10 | 6 | 5  |

Рис. 10

вторая – на 9 место и т.д. Однажды Винтик собрался отправить сообщение Шпунтику. Он его зашифровал, а потом, для пущей надежности, зашифровал полученный текст еще раз. Подумал, и зашифровал его еще 333 раза. В результате Шпунтик получил вот такое сообщение:

СЬТУЕМНСЕЯИКЛЕОНКАСО.

Помогите Шпунтику его прочитать.

6 (10, 11 классы). Для шифрования сообщения из 13 букв на русском языке проделали следующие действия: 1) преобразовали последовательно буквы сообщения с помощью таблицы (рис. 11) в цепочку чисел  $x_1, x_2, \dots, x_{13}$ ; 2) выбрали (секретное) натуральное число  $k_1$  и дописали сумму  $x_{14} = x_1 + x_2 + \dots + x_{13} + k_1$  к цепочке справа; 3) в расширенной цепочке

$x_1, x_2, \dots, x_{13}, x_{14}$  числа  $x_i$  заменили числами  $y_i$  по формулам  $y_i = 2x_i + x_{i+1} + (-1)^{\frac{i+1}{2}} k_1$ , если  $i$  нечетное, и  $y_i = x_{i-1} + x_i + (-1)^{\frac{i}{2}} k_2$ , если  $i$  – четное, где  $k_2$  – еще одно (секретное) натуральное число; 4) каждое  $y_i$  заменили его остатком от деления на 32. В результате получили вот что:

20, 31, 12, 11, 6, 9, 5, 9, 14,  
27, 9, 10, 11, 16.

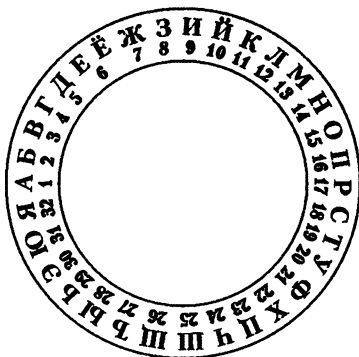


Рис. 11

Найдите исходное сообщение.

7 (11 класс). Для хранения пароля, записанного в 32-буквенном алфавите, каждая буква представляется порядковым номером – парой цифр (т.е. А – 01, Б – 02 и т.д., как на рисунке 11). Получается последовательность цифр  $y_1, y_2, y_3, \dots$ . Одновременно по правилу  $x_{i+1} = r_{10}(ax_i + b)$ ,  $i \in \mathbb{N}$ , вырабатывается последовательность десятичных цифр  $(x_i)$ , минимальный период которой равен 10, где  $r_{10}(x)$  – остаток от деления  $x$  на 10,  $a$  и  $b$  – натуральные числа. После чего по правилу  $c_i = r_{10}(x_i + y_i)$  вычисляется последовательность  $(c_i)$ , которая и сохраняется в памяти компьютера. Вася выбрал для пароля очень короткое слово, поэтому при вводе был вынужден повторить его дважды. Помогите ему восстановить забытый пароль, если сохраненная последовательность  $(c_i)$  имеет вид

3,5,8,4,3,8,8,2,7,9,2,8,7,2,2,6.

Публикацию подготовили  
М.Алексеев, С.Мотылев, О.Шабанин

**МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ  
УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Э.БАУМАНА**

**ФИЗИКА**

*Олимпиада-2014*

**I тур**

*Вариант 1*

1. Точки 1 и 2 движутся равномерно по осям  $x$  и  $y$  (рис.1). В момент времени  $t = 0$  координата точки 1 равна  $x_0 = 2$  м, а координата точки 2 —  $y_0 = 4$  м. Первая точка движется со скоростью  $v_1 = 1$  м/с, а вторая со скоростью  $v_2 = 5$  м/с. Найдите наименьшее расстояние между точками.

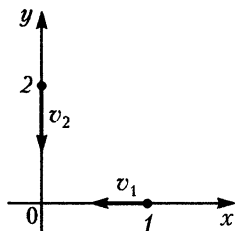


Рис. 1



Рис. 2

2. Постройте изображение человека в плоском зеркале (рис.2).

3. Однородная цепочка массой  $m = 0,8$  кг и длиной  $L = 1,5$  м лежит на шероховатом горизонтальном столе так, что один ее конец свешивается с края стола. Цепочка начинает сама соскальзывать, когда ее свешивающаяся часть составляет  $1/3$  длины цепочки. Найдите работу, которую совершат силы трения, действующие на цепочку, при ее полном соскальзывании со стола.

4. Снаряд, двигаясь на высоте  $h$  горизонтально, разрывается на два одинаковых осколка, один из которых падает на землю

через время  $t_1$  после взрыва, а другой – позднее. Через сколько времени после взрыва упадет на землю второй осколок? Сопротивление воздуха не учитывать. Время взрыва считать очень малым.

5. На диаграмме зависимости давления  $p$  от объема  $V$  для некоторой массы идеального газа две изотермы пересекаются двумя изобарами в точках 1, 2, 3, 4 (рис.3). Найдите отношение температуры в точке 3 ( $T_3$ ) к температуре в точке 1 ( $T_1$ ), если отношение объемов газа в этих точках  $V_3/V_1 = 2$ . Объемы газа в точках 2 и 4 одинаковые.

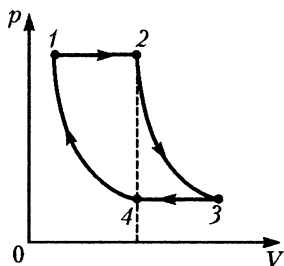


Рис. 3

6. Одноатомный идеальный газ участвует в процессе, для которого внутренняя энергия газа пропорциональна квадрату его объема:  $U = \alpha V^2$ , где  $\alpha$  – постоянная. Найдите работу  $A$ , совершенную газом в таком процессе, если известно количество теплоты  $Q$ , сообщенное при этом газу.

7. Определите КПД электрической цепи, изображенной на рисунке 4. Сопротивления резисторов  $R_1 = 2$  Ом,  $R_2 = 5$  Ом. Внутреннее сопротивление источника тока  $r = 0,5$  Ом.

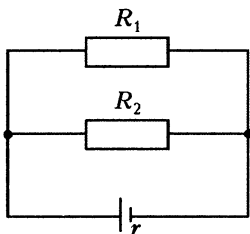


Рис. 4

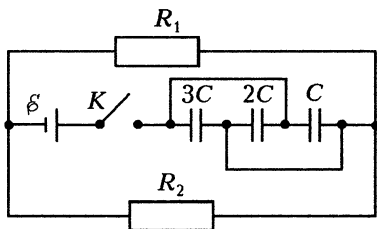


Рис. 5

8. В схеме, показанной на рисунке 5, перед замыканием ключа  $K$  батарея, состоящая из трех конденсаторов емкостями  $C$ ,  $2C$  и  $3C$ , не была заряжена. Ключ замыкают на некоторое время, в течение которого конденсатор емкостью  $3C$  зарядился до напряжения  $U$ . Определите, какое количество теплоты  $Q_1$  выделится за это время на резисторе сопротивлением  $R_1$ . ЭДС источника тока равна  $\mathcal{E}$ , его внутренним сопротивлением можно пренебречь.

9. Из проволоки общим сопротивлением  $R$  сделан плоский замкнутый контур, состоящий из двух квадратов со сторонами  $a$  и  $2a$  (рис.6). Контур находится в однородном магнитном поле с

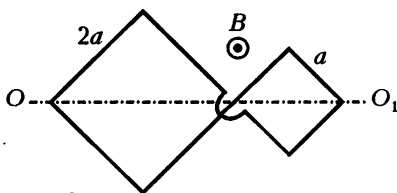


Рис. 6

индукцией, равной  $B$  и направленной перпендикулярно плоскости контура. Найдите заряд, который протечет через поперечное сечение провода при повороте контура вокруг оси симметрии  $OO_1$  на  $180^\circ$ . Между пересекающимися на рисунке проводами электрический контакт отсутствует.

**10.** По гладкой горизонтальной плоскости скользит со скоростью  $v = 0,5$  м/с тонкий однородный брусок длиной  $L = 1$  м (рис.7). Брусок наезжает на шероховатый участок плоскости с коэффициентом трения  $\mu = 0,1$  и, пройдя расстояние  $s = 0,25$  м, ударяется о вертикальную стенку.

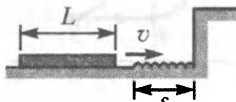


Рис. 7

Определите время движения бруска по шероховатой поверхности до вертикальной стенки. Ускорение свободного падения принять равным  $g = 10$  м/с<sup>2</sup>.

**Вариант 2**

**1.** Точка движется по оси  $x$  по закону  $x = 5 + 4t - 2t^2$  (м). На каком расстоянии от начала координат скорость точки будет равна нулю?

**2.** Однородный стержень длиной  $L$  и массой  $m$  шарнирно закреплен в точке  $O$  (рис.8). В точке  $C$ , отстоящей на  $2L/3$  от оси  $O$ , стержень опирается на пружину. На стержне закреплены два маленьких груза, массы которых  $3m$  и  $m$ , а их положения показаны на рисунке. Найдите силу реакции в шарнире и силу упругости, возникающую в пружине

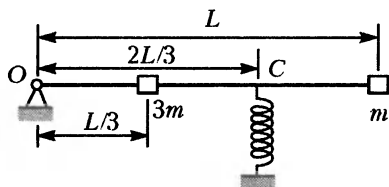


Рис. 8

не в положении равновесия стержня, когда он неподвижен и расположен горизонтально. Массой пружины и силами трения пренебречь.

**3.** Груз 1 массой  $m$  подвешен через пружину жесткостью  $k$  на нерастяжимой нити, перекинутой через блок, соединенной с бруском 2, лежащим на горизонтальной плоскости (рис.9). В начальный момент груз удерживается так, что пружина находится в ненапряженном состоянии, затем его отпускают без началь-

ной скорости. Найдите минимальную массу бруска, при которой он еще будет оставаться неподвижным. Коэффициент трения между бруском и плоскостью равен  $\mu$ . Массой пружины, нити, блока и трением в нем пренебречь.

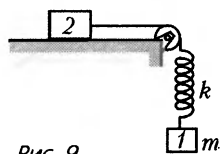


Рис. 9

4. Тело массой 1 кг брошено под углом к горизонту. За все время полета его импульс изменился на  $\Delta p = 20 \text{ кг} \cdot \text{м/с}$ . Пренебрегая сопротивлением воздуха, определите наибольшую высоту подъема тела.

5. Определите максимальную величину скорости точки, движение которой описывается уравнением  $x = 2 \cos(5t - \pi/4) \text{ (см)}$ .

6. Плотность смеси гелия и азота при нормальных условиях равна  $\rho = 0,60 \text{ г/л}$ . Найдите концентрацию атомов гелия в смеси.

7. Один моль одноатомного идеального газа переходит из состояния 1 в состояние 3 по изохоре 1–2 и изотерме 2–3, как показано на графике зависимости объема  $V$  от температуры  $T$  (рис. 10;  $T_0 = 100 \text{ К}$ ). На участке 2–3 к газу подводят 2,5 кДж тепла. Найдите отношение полной работы газа  $A_{123}$  ко всему подведенному к газу количеству теплоты  $Q_{123}$ .

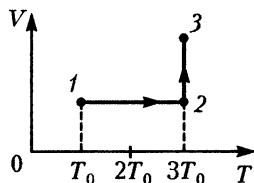


Рис. 10

8. Два равномерно заряженных тонких кольца находятся в вакууме во взаимно перпендикулярных плоскостях и имеют общий центр, в котором находится положительный точечный заряд  $+q$ . Линейная плотность зарядов одного кольца  $+\tau$ , а его радиус  $R$ . Линейная плотность зарядов второго кольца  $-2\tau$ , а его радиус  $2R$ . Найдите напряженность поля в центре колец и работу сил электрического поля при перемещении заряда  $+q$  из центра колец в бесконечность, где потенциал поля можно считать равным нулю.

9. В электрической цепи, схема которой показана на рисунке 11, установившееся напряжение на резисторе сопротивлением  $R$  равно  $U = 5 \text{ В}$ . Считая параметры элементов схемы известными, определите величину напряжения на конденсаторе емкостью  $C$ .

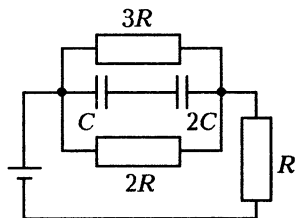


Рис. 11

10. Контур состоит из участка  $OC$ , полукольца  $AC$  и стержня  $OD$  сопротивлением  $R$  и длиной  $L$ , который может скользить по



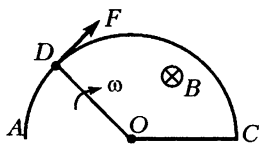


Рис. 12

полукольцу, вращаясь вокруг его центра — точки  $O$  (рис.12). Сопротивления остальных участков контура и скользящего контакта пренебрежимо малы. Контур помещен в однородное магнитное поле с индукцией  $B$ , линии которой перпендикулярны плоскости контура.

Найдите модуль минимальной силы  $F$ , которую надо приложить к стержню в точке  $D$ , чтобы вращать его с постоянной угловой скоростью  $\omega$ .

## II тур

### Вариант 1

1. Из пункта  $A$ , находящегося на шоссе, необходимо за кратчайшее время попасть на машине в пункт  $B$ , расположенный

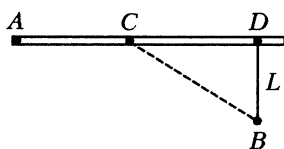


Рис. 13

в поле на расстоянии  $L$  от шоссе (рис.13). Известно, что скорость машины по полю в два раза меньше, чем ее скорость по шоссе. На каком расстоянии от точки  $D$  следует свернуть с шоссе?

2. Четыре заряда  $q_1 = 1,5q$ ,  $q_2 = \sqrt[4]{27}q$ ,  $q_1 = 1,5q$ ,  $q_2 = \sqrt[4]{27}q$ , расположенные в среде с диэлектрической проницаемостью  $\epsilon = 1,25$ , как показано на рисунке 14, связаны пятью не проводящими ток нитями длиной  $L$  каждая. Определите силу  $T$  натяжения нити, связывающей заряды  $q_1$  и  $q_1$ .

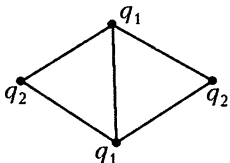


Рис. 14

3. Небольшое тело массой  $m$  лежит на клине массой  $3m$  с длиной наклонной стороны  $l$  и углом при основании  $\alpha = 30^\circ$ . Определите расстояние  $\Delta x$ , на которое переместится клин за время, пока тело спустится с его вершины до основания. Трением пренебречь.

4. По трубопроводу, расположенному в горизонтальной плоскости и изогнутому под прямым углом, подается топливо, расход которого  $Q = 10 \text{ дм}^3/\text{с}$ . Площадь сечения трубы  $S = 50 \text{ см}^2$ . Плотность топлива  $\rho = 0,9 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$ . Определите величину минимальной горизонтальной составляющей силы, которую необходимо приложить к трубе, чтобы она была неподвижна.

5. Рабочим веществом идеальной тепловой машины, работающей по циклу Карно, является один моль идеального одноатом-

ного газа. КПД цикла известен и равен  $\eta$ . Определите температуру нагревателя, если работа, которую совершает газ при адиабатическом расширении, равна  $A$ .

6. Сопротивление  $R_1 = 10$  Ом и изменяемое сопротивление  $R_x$  подключены к источнику постоянного напряжения  $U = 100$  В (рис.15). Найдите значение сопротивления  $R_x$ , при котором на нем выделяется максимальная тепловая мощность, и значение этой мощности.

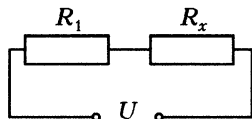


Рис. 15

7. При освещении металлической пластины с работой выхода  $A$  светом длиной волны  $\lambda$  вылетающий электрон попадает в однородное магнитное поле с индукцией  $B$  (рис.16). Направление скорости электрона перпендикулярно линиям индукции поля. Определите максимальную глубину  $h$  проникновения электрона в область магнитного поля, если угол падения электрона на границу области, занятой магнитным полем, равен  $\alpha = 30^\circ$ .

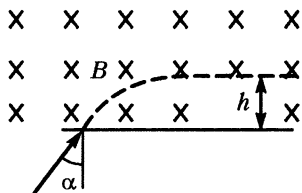


Рис. 16

8. Плоско-выпуклая линза с радиусом кривизны  $R = 50$  см имеет оптическую силу  $D_1 = 1$  дптр. Найдите оптическую силу этой линзы, если посеребрить ее плоскую поверхность. Свет падает на не посеребренную поверхность (рис.17).

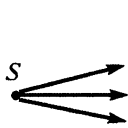


Рис. 17

9. Заряженный конденсатор емкостью  $C$  через ключ  $K$  подключен к двум параллельно соединенным катушкам с индуктивностями  $L$  и  $2L$  (рис.18). В начальный момент времени ключ разомкнут. Если замкнуть ключ, то через катушки потечут токи. Максимальный ток, протекающий через катушку индуктивностью  $L$ , оказался равным  $I_1$ . Найдите первоначальный заряд  $q$  на конденсаторе. Сопротивлениями катушек пренебречь.

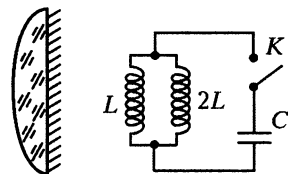


Рис. 18

10. На гладкой горизонтальной поверхности массивной плиты покоится клин массой  $M$  с углом наклона  $\alpha = 30^\circ$  (рис.19). Клин плотно прилегает к поверхности плиты. Летя-

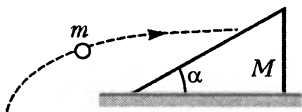


Рис. 19

щий по параболической траектории шар массой  $m$  ударяется о гладкую наклонную поверхность клина, причем в момент удара его скорость направлена горизонтально (удар абсолютно упругий). В результате клин начинает двигаться по плите. Найдите отношение  $m/M$ , если через некоторое время шар попадает в ту же самую точку на клине, от которой он отскочил.

### Вариант 2

1. В системе отсчета, относительно которой прямоугольный треугольник покоится, длина его гипотенузы  $L_0 = 1$  м, а угол между катетом  $b$  и гипотенузой  $\alpha = 30^\circ$ . Определите длину гипотенузы этого треугольника в системе отсчета, относительно которой треугольник движется вдоль катета  $b$  с релятивистской скоростью  $v = 1,5 \cdot 10^8$  м/с.

2. Конструкция, состоящая из стержней, соединенных шарнирами, прикреплена к стене в точке  $O$  и растягивается с помощью груза массой  $m$  и нити, соединенной с шарниром  $A$  (рис.20). Сплошные стержни  $BF$  и  $CE$  шарнирно соединены в точке  $D$ , так что  $AB = AC = CD = DE = BD = DF = OF = OE$ .

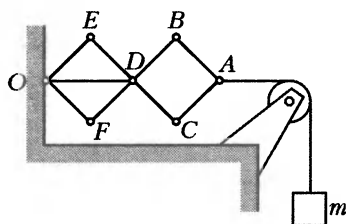


Рис. 20

Определите силу натяжения нити, соединяющей шарниры  $O$  и  $D$ . Массой стержней и нитей, а также трением в блоке пренебречь.

3. Шарик падает на пол с высоты  $H$  и многократно отскакивает от него. Полагая, что при каждом отскоке скорость шарика уменьшается в три раза, определите путь, пройденный шариком от начала падения до остановки. Сопротивлением воздуха пренебречь.

4. Цилиндрический сосуд высотой  $H$  и площадью основания  $S_0$  полностью заполнен жидкостью. В дне сосуда открыли малое отверстие площадью  $S \ll S_0$ . Пренебрегая вязкостью жидкости, определите, через сколько времени в сосуде останется  $3/4$  начального объема жидкости.

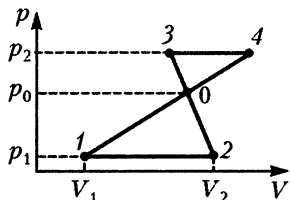


Рис. 21

5. Определите работу, которую совершает идеальный газ в замкнутом цикле  $1-4-3-2-1$ , изображенном на рисунке 21, если  $p_1 = 10^5$  Па,  $p_0 = 3 \cdot 10^5$  Па,  $p_2 = 4 \cdot 10^5$  Па,  $V_2 - V_1 = 10$  л, а участки цикла  $4-3$  и  $2-1$  параллельны оси  $V$ .

6. Дана цепь (рис.22), составленная из бесконечного числа повторяющихся секций с сопротивлениями  $R_1 = 2 \text{ Ом}$  и  $R_2 = 4 \text{ Ом}$ . Найдите полное сопротивление между точками  $A$  и  $B$ .

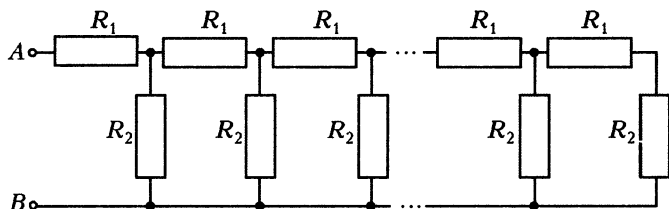


Рис. 22

7. катушку индуктивностью  $L = 1,0 \text{ мГн}$ , соединенную последовательно с резистором (рис.23), подключили к источнику переменного напряжения с амплитудным значением  $U_0 = 10 \text{ В}$  и круговой частотой  $\omega = 400 \text{ с}^{-1}$ . Найдите значение сопротивления  $R$  резистора, при котором в цепи будет выделяться максимальная тепловая мощность.

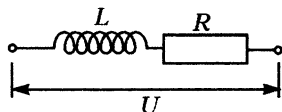


Рис. 23

Чему равна эта максимальная мощность?

8. Нерелятивистская частица массой  $m_1$  сталкивается с покоящейся частицей. Удар абсолютно упругий, прямой, центральный. Найдите массу покоившейся частицы, если длина волны де Бройля налетающей частицы после удара изменилась в  $n = 2$  раза.

9. Энергия атома водорода в основном состоянии равна  $E_1 = -13,53 \text{ эВ}$ . Найдите длину волны излучения, поглощенного электроном при переходе его со второго энергетического уровня на четвертый.

10. Проводящий стержень массой  $m$  и длиной  $L$  подвешен к диэлектрику с помощью двух одинаковых пружин жесткостью  $k$  каждая (рис.24). К верхним концам пружин присоединена батарея из двух конденсаторов емкостью  $C$  каждый. Система находится в однородном магнитном поле с индукцией  $B$ , направленной перпендикулярно плоскости рисунка, и совершает колебания в вертикальной плоскости. Пренебрегая массой пружин, сопротивлением, собственной индуктивностью и емкостью проводников, определите период колебаний стержня.

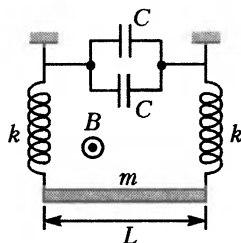


Рис. 24

Вариант 3

1. Точка  $A$  движется согласно уравнениям  $x_1 = 2t$ ,  $y_1 = t$ , а точка  $B$  — согласно уравнениям  $x_2 = 10 - t$ ,  $y_2 = 2t$ , где  $x$ ,  $y$  измеряются в метрах,  $t$  — в секундах. Определите расстояние между двумя точками в момент их максимального сближения.

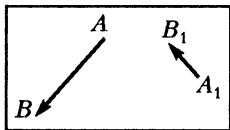


Рис. 25

2. На рисунке 25 показаны предмет  $AB$  и его изображение  $A_1B_1$ , полученное с помощью линзы. Определите построением положение главных фокусов линзы.

3. Система, состоящая из двух шайб, прочно соединенных пружиной жесткостью  $k$ , стоит неподвижно на горизонтальном столе (рис. 26). Масса нижней шайбы  $m$ , масса верхней шайбы  $2m$ . Найдите величину  $\Delta l$ , на которую нужно опустить

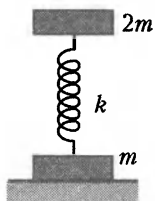


Рис. 26

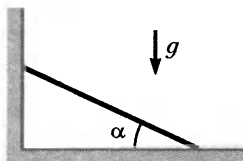


Рис. 27

верхнюю шайбу, чтобы после ее освобождения нижняя шайба подскочила. Массой пружины и силами трения пренебречь.

4. Однородный стержень опирается о вертикальную плоскость, образуя с горизонтальной плоскостью угол  $\alpha = 30^\circ$  (рис. 27). Коэффициент трения между стержнем и горизонтальной плоскостью  $\mu_1 = 0,5$ . Чему равна минимальная величина коэффициента трения  $\mu_2$  между стержнем и вертикальной плоскостью, при которой стержень будет находиться в равновесии?

5. Один моль идеального газа расширяется в процессе 1-2, для которого  $pV^3 = \text{const}$ , от давления  $p_1 = 8 \cdot 10^5$  Па и объема  $V_1 = 1$  л до объема  $V_2 = 2$  л. Определите изменение температуры газа в этом процессе.

6. На  $pV$ -диаграмме (рис. 28) изображены 2 цикла тепловой машины, рабочим телом которой является идеальный газ. Определите коэффициент полезного действия цикла 1-2-3-4-1, если КПД цикла 1-2-3-1 равен  $\eta_1 = 8,7\%$ , а цикла 1-3-4-1 —  $\eta_2 = 9,5\%$ .

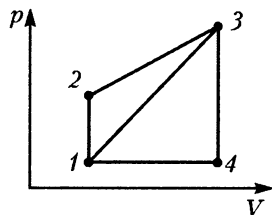


Рис. 28

7. Плоский воздушный конденсатор, емкость которого  $C_0 = 500$  пФ и расстояние между пластинами  $d = 1$  см, подключен к источнику постоянного

тока с напряжением  $U = 1$  кВ. Пространство между пластинами конденсатора заполнили двумя слоями диэлектрика одинаковой толщины  $d/2$  с диэлектрическими проницаемостями  $\epsilon_1 = 3$  и  $\epsilon_2 = 5$ . Найдите напряженность электрического поля в диэлектрике с диэлектрической проницаемостью  $\epsilon_2$  и работу, которую совершит источник тока при удалении из конденсатора диэлектрика с диэлектрической проницаемостью  $\epsilon_1$ .

8. Какой максимальный заряд может накопиться на удаленном от других тел медном шарике радиусом  $r = 3$  см при облучении его электромагнитным излучением с длиной волны  $\lambda = 0,14$  мкм? Работа выхода для меди  $A = 4,47$  эВ.

9. Найдите ток через перемычку  $ab$  в схеме, представленной на рисунке 29. Сопротивления перемычки, проводящих проводов и внутренним сопротивлением батареи пренебречь.

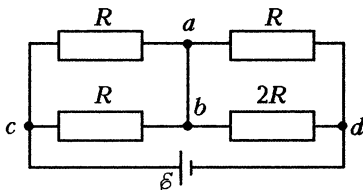


Рис. 29

10. Горизонтальный контур образован двумя замкнутыми на катушку индуктивности  $L$  параллельными проводниками, находящимися на расстоянии  $h$  друг от друга (рис.30). По проводникам без трения может скользить перемычка. Контур помещен в вертикальное однородное магнитное поле с индукцией  $B$ . В начальный момент времени неподвижной перемычке сообщают скорость  $v_0$ . Определите массу перемычки и время, за которое скорость перемычки уменьшится в два раза, если известно расстояние  $s$ , которое пройдет перемычка до первой остановки. Сопротивлением всех элементов контура пренебречь.

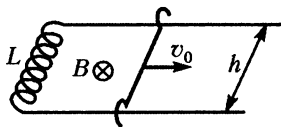


Рис. 30

Публикацию подготовил Ю.Струков

**МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ  
(ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)**

*Олимпиада «Физтех-2014»*

*Заключительный этап*

**МАТЕМАТИКА**

*Вариант 1*

**1. Решите уравнение**

$$\log_{2^{x+1}+1}(3x^2 + 4x - 3) = \log_{10-2^{2-x}}(3x^2 + 4x - 3).$$

**2. Решите уравнение**

$$\frac{\cos x \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)}{7 \cos^2 x + 5 \sin^2 x - 6} + \frac{\cos x \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)}{6 - 5 \cos^2 x - 7 \sin^2 x} = \frac{\operatorname{tg} 2x}{\sqrt{2}}.$$

**3. Решите систему уравнений**

$$\begin{cases} x^2 - 4xy + 4y^2 = 2x - 4y + 3, \\ \sqrt{3x - 6y} = 2 - xy. \end{cases}$$

**4.** Дана трапеция  $ABCD$  с основаниями  $BC$  и  $AD$ . Окружность  $\omega$  радиуса 2, центр  $O$  которой лежит на диагонали  $AC$ , касается отрезков  $BC$ ,  $AB$  и  $AD$  в точках  $M$ ,  $N$  и  $K$  соответственно. Известно, что  $AC = 4\sqrt{5}$ , а четырехугольник  $KOCD$  вписан в окружность  $\Omega$ . Найдите угол  $BOC$ , площадь трапеции  $ABCD$  и радиус окружности  $\Omega$ .

**5.** Сколько решений в натуральных числах имеет уравнение  $x^3 y^2 = 15^{15} \cdot 20^{20}$ ?

**6.** Найдите все значения переменной  $x$ , при каждом из которых оба выражения

$$f(x) = \frac{1}{\cos^2 x} + 2\sqrt{3} \operatorname{tg} x + 4 \text{ и}$$

$$g(x) = \frac{2x-1}{\sqrt{16+6x-x^2}} + \frac{\sqrt{16+6x-x^2}}{2x-1}$$

определены, причем значение меньшего из выражений не превосходит двух (если два числа равны, то меньшим считается любое из них).

7. Даны пирамида  $ABCD$  и сфера радиуса 3. Ребро  $AB$  пирамиды является диаметром сферы; прямые, содержащие три других ребра, касаются сферы, а середины двух оставшихся ребер лежат на сфере. Найдите угол  $ACB$ , длину ребра  $CD$  и объем пирамиды  $ABCD$ .

Вариант 2

1. Решите уравнение

$$\log_{x^2-2x} (2 - 3^{4x-x^2}) = \log_{6-x} (2 - 3^{4x-x^2}).$$

2. Решите уравнение

$$\frac{\cos x \cos \left(x + \frac{\pi}{6}\right)}{6 \cos^2 x + 4 \sin^2 x - 5} + \frac{\cos x \sin \left(x + \frac{\pi}{3}\right)}{5 - 4 \cos^2 x - 6 \sin^2 x} = \frac{-\sqrt{3} \operatorname{tg} 2x}{2}.$$

3. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x^2 + 4y^2 + 4xy = 2x + 4y + 3, \\ \sqrt{3x + 6y} + xy = 4. \end{cases}$$

4. Дана трапеция  $ABCD$  с основаниями  $BC$  и  $AD$ . Окружность  $\omega$  радиуса 2, центр  $O$  которой лежит на диагонали  $BD$ , касается отрезков  $BC$ ,  $CD$  и  $AD$  в точках  $M$ ,  $N$  и  $K$  соответственно. Известно, что  $BM = 3$ , а четырехугольник  $KОВА$  вписан в окружность  $\Omega$ . Найдите угол  $COD$ , площадь трапеции  $ABCD$  и радиус окружности  $\Omega$ .

5. Сколько решений в натуральных числах имеет уравнение  $x^5 y^3 = 18^{50} \cdot 10^{33}$ ?

6. Найдите все значения переменной  $x$ , при каждом из которых оба выражения

$$f(x) = \frac{3}{\sin^2 x} - 2\sqrt{3} \operatorname{ctg} x \quad \text{и} \quad g(x) = \frac{2x - 3}{\sqrt{9 + 8x - x^2}} + \frac{\sqrt{9 + 8x - x^2}}{2x - 3}$$

определены, причем значение меньшего из выражений не превосходит двух (если два числа равны, то меньшим считается любое из них).

7. Даны пирамида  $ABCD$  и сфера радиуса  $\sqrt{3}$ . Ребро  $AC$  пирамиды является диаметром сферы; прямые, содержащие три других ребра, касаются сферы, а середины двух оставшихся



ребер лежат на сфере. Найдите угол  $ABC$ , длину ребра  $BD$  и объем пирамиды  $ABCD$ .

*Вариант 3*

1. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 2x^3 + 3xy + 3y^2 = 16, \\ x^3 - x^2 + xy + 2y^2 = 8. \end{cases}$$

2. Решите уравнение

$$\sqrt{3} \left( \frac{\sin x}{\sin x - \cos x} + \operatorname{tg} 2x \right) = \frac{\cos x}{\sin x + \cos x}.$$

3. Решите уравнение

$$\begin{aligned} \log_{6x-5}(6x^2 - 11x + 5) \cdot \log_{x-1}(x^3 - 1) &= \\ &= \log_{6x-5}(6x^2 - 11x + 5) + \log_{x-1}(x^3 - 1). \end{aligned}$$

4. Дан выпуклый четырехугольник  $ABCD$ , в котором  $\angle BCD = 90^\circ$ . На стороне  $CD$  выбрана точка  $K$ . Окружность  $\omega$  радиуса 2, описанная вокруг треугольника  $BSK$ , касается отрезка  $AD$  и касается прямой  $AB$ . Известно, что четырехугольник  $ABKD$  вписан в окружность  $\Omega$  радиуса  $\sqrt{13}$ . Найдите длину отрезка  $AB$ , угол  $BAD$  и площадь четырехугольника  $ABCD$ .

5. Есть семь карточек с цифрами 0; 1; 2; 3; 3; 4; 5. Сколько существует различных шестизначных чисел, делящихся на 15, которые можно сложить из этих карточек?

6. Найдите все значения переменной  $x$ , при каждом из которых оба выражения

$$\begin{aligned} f(x) &= \operatorname{tg}^2 \left( \frac{\pi \cos x}{4} \right) + \operatorname{ctg}^2 \left( \frac{\pi \cos x}{4} \right) \quad \text{и} \\ g(x) &= \frac{\sqrt{28 + 3x - x^2} + 2x + 2}{1 + x} \end{aligned}$$

определены, причем значение меньшего из выражений не превосходит двух (если два числа равны, то меньшим считается любое из них).

7. В треугольной пирамиде  $SABC$  из вершины  $S$  опустили высоту  $SH$ . Известно, что  $AB > BC$ ,  $AB > AC$ . Сфера, построенная на отрезке  $SH$  как на диаметре, проходит через середины четырех ребер пирамиды, и ее радиус равен 3.

а) Найдите длину ребра  $AB$  и угол  $ACB$ .

б) Пусть дополнительно известно, что прямая, проходящая через вершину  $C$  и середину ребра  $SA$ , касается сферы. Найдите объем пирамиды  $SABC$ .

Вариант 4

1. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} y^3 - x^2 - xy + 1 = 0, \\ 2y^3 - 3x^2 - 5xy - 2y^2 + 2 = 0. \end{cases}$$

2. Решите уравнение

$$\frac{\cos x}{\sin x + \cos x} + \operatorname{tg} 2x = \frac{\sqrt{3} \sin x}{\sin x - \cos x}.$$

3. Решите уравнение

$$\begin{aligned} \log_{7x-6}(7x^2 + x - 6) \cdot \log_{x+1}(x^3 + 1) = \\ = \log_{7x-6}(7x^2 + x - 6) + \log_{x+1}(x^3 + 1). \end{aligned}$$

4. Четырехугольник  $ABKD$  вписан в окружность  $\Omega$  радиуса  $\sqrt{37}$ . На стороне  $KD$  выбрана точка  $C$  так, что  $\angle BCD = 90^\circ$ . Окружность  $\omega$  радиуса 6, описанная вокруг треугольника  $BSK$ , касается отрезка  $AD$  и касается прямой  $AB$ . Найдите длину отрезка  $AB$ , угол  $BAD$  и площадь четырехугольника  $ABCD$ .

5. Есть восемь карточек с цифрами 0; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9. Сколько существует различных семизначных чисел, делящихся на 15, которые можно сложить из этих карточек?

6. Найдите все значения переменной  $x$ , при каждом из которых оба выражения

$$\begin{aligned} f(x) = \operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi \cos x}{2\sqrt{2}}\right) + \operatorname{ctg}^2\left(\frac{\pi \cos x}{2\sqrt{2}}\right) \quad \text{и} \\ g(x) = \frac{\sqrt{15 - 2x - x^2} + 2x + 4}{2 + x} \end{aligned}$$

определены, причем значение меньшего из выражений не превосходит двух (если два числа равны, то меньшим считается любое из них).

7. В треугольной пирамиде  $SABC$  из вершины  $S$  опустили высоту  $SH$ . Известно, что  $SH = 6$ ,  $AC > BC$ ,  $AB > AC$ . Сфера, построенная на отрезке  $SH$  как на диаметре, проходит через середины четырех ребер пирамиды.

а) Найдите длину ребра  $AC$  и угол  $ABC$ .

б) Пусть дополнительно известно, что прямая, проходящая через вершину  $B$  и середину ребра  $SC$ , касается сферы. Найдите объем пирамиды  $SABC$ .

# ФИЗИКА

## Вариант 1

1. По горизонтальной поверхности пола движется со скоростью  $u = 1 \text{ м/с}$  тележка со штативом, к которому на нити длиной  $l = 0,5 \text{ м}$  привязан шар (рис. 1).

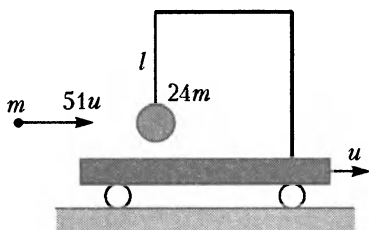


Рис. 1

Пуля, летящая горизонтально со скоростью  $51u$ , попадает в шар и застревает в нем. Массы пули и шара  $m$  и  $24m$ , масса тележки намного больше массы шара. Направления всех движений находятся в одной вертикальной плоскости. Размеры шара малы по сравнению с длиной нити.

1) Найдите скорость шара  $v_1$  относительно тележки сразу после попадания пули.

2) Найдите скорость шара  $v_2$  относительно пола сразу после попадания пули.

3) На какой максимальный угол от вертикали отклонится нить при дальнейших колебаниях шара?

2. Идеальный газ совершает цикл, состоящий из изотермического расширения, изохорического охлаждения и адиабатического сжатия. Работа газа при расширении в 10 раз больше работы газа за цикл.

1) Во сколько раз работа газа при расширении больше работы над газом при сжатии?

2) Найдите КПД цикла.

3. Плоский воздушный конденсатор емкостью  $C_0$  с расстоянием между обкладками  $d$  заряжен до напряжения  $U_0$  и отсоединен от источника.

1) Найдите силу притяжения обкладок конденсатора.

2) Какую минимальную работу надо совершить, чтобы увеличить расстояние между обкладками на  $d/3$ ?

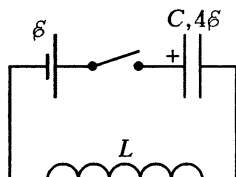


Рис. 2

4. В цепи, схема которой показана на рисунке 2, все элементы можно считать идеальными, параметры элементов указаны на рисунке. До замыкания ключа конденсатор был заряжен до напряжения  $4ε$ . Ключ замыкают.

1) Найдите максимальный ток в цепи.

2) Найдите ток в момент, когда заряд на конденсаторе равен нулю.

5. Фокусное расстояние собирающей линзы равно  $F$ . Муха в некоторый момент пересекает главную оптическую ось линзы на расстоянии  $\frac{7}{5}F$  от линзы, двигаясь со скоростью  $v$  под углом  $\alpha$  ( $\operatorname{tg} \alpha = \frac{4}{3}$ ) к оси линзы (рис.3).

1) На каком расстоянии от линзы находится изображение мухи в этот момент?

2) Под каким углом изображение мухи пересекает главную оптическую ось?

3) Найдите скорость изображения мухи в этот момент.

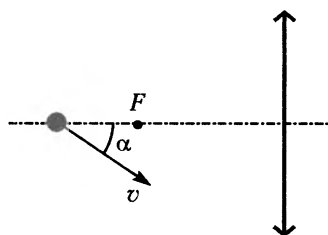


Рис. 3

*Публикацию подготовили*

*Д.Александров, С.Городецкий, В.Чивилёв, М.Шабунин*

# НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ «МИЭТ»

## ФИЗИКА

### Интернет-олимпиада «Поверь в себя!»



Национальный исследовательский университет «МИЭТ» на протяжении многих лет проводит для старшеклассников олимпиады по математике, физике и информатике, которые пользуются большой популярностью среди школьников Москвы и Московской области. Чтобы расширить круг участников, начиная с 2010 года МИЭТ проводит олимпиады в заочной форме, используя интернет-технологии.

Олимпиада по физике проходит под названием «Поверь в себя!» Она не содержит сверхсложных задач, которые могут решать только специально подготовленные школьники. Почти все задачи олимпиады допускают простые решения без громоздкой алгебры на основе знаний обычной школьной программы. Однако наряду с вполне стандартными задачами в заданиях олимпиады можно найти и новые, решения которых сразу не очевидны. Подробности об олимпиаде можно узнать на сайте: <http://www.abiturient.ru/> и по телефонам: (499) 734-02-42, (499) 720-89-58.

Ниже приводятся задания олимпиады 2014 года.

#### Задачи первого тура

1. Два спортсмена бегут по круговой дорожке стадиона с постоянными скоростями. Первый спортсмен заметил, что обгоняет второго через каждые 3,5 круга. Сколько кругов между двумя последовательными обгонами пробегает второй спортсмен?

2. Из четырех одинаковых кубиков составлены два тела, которые условно будем называть «синим» и «красным» (рис.1).

Температура синего тела  $20^{\circ}\text{C}$ , а красного  $60^{\circ}\text{C}$ . До какой максимальной температуры можно нагреть синее тело только за счет теплообмена между кубиками (т.е. без совершения работы)? Тепловыми потерями пренебречь.

3. Три одинаковых металлических шарика  $A$ ,  $B$  и  $C$ , заряды которых равны  $q_A = 5 \text{ пКл}$ ,  $q_B = -3 \text{ пКл}$  и  $q_C = 1 \text{ пКл}$  соответственно, привели в соприкосновение. Заряд какого шарика при этом не изменился?

4. Одинаковые резисторы соединены «кольцом» (рис.2). Омметр, подключенный к одному из резисторов, показывает сопротивление  $16 \text{ Ом}$ , а подключенный к двум последовательным резисторам –  $24 \text{ Ом}$ . Сколько резисторов в кольце?

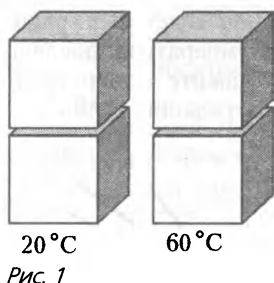


Рис. 1

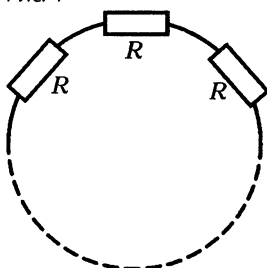


Рис. 2

#### Задачи заключительного тура

1. Пять одинаковых стальных шаров подвешены на одинаковых нитях так, что соседние шары касаются друг друга (рис.3).

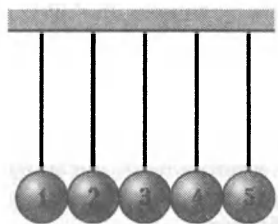


Рис. 3

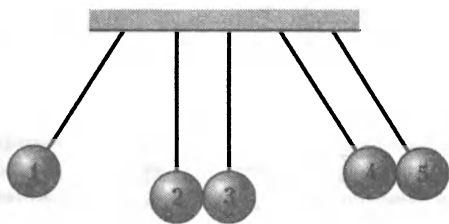


Рис. 4

Как будут вести себя шары после первого соударения, если отвести в сторону и одновременно отпустить шары 1, 4, 5 (рис.4)?

- А) Шар 3 остановится, остальные будут двигаться;
- Б) шары 2 и 3 остановятся, остальные будут двигаться;
- В) шары 3 и 4 остановятся, остальные будут двигаться;
- Г) все шары будут двигаться.

2. На рисунке 5 показаны графики зависимости температуры  $T$  газов от сообщенного им количества теплоты в изохорном и изобарном процессах для двух газов: гелия  $\text{He}$  и водорода  $\text{H}_2$

(два из четырех графиков совпали). Начальные состояния газов (температура, давление, объем) в каждом процессе одинаковы. Укажите номер графика, который соответствует изобарному нагреванию гелия.

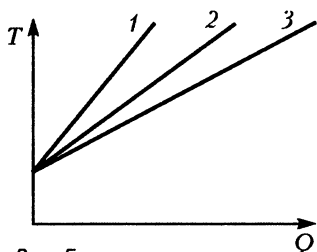


Рис. 5

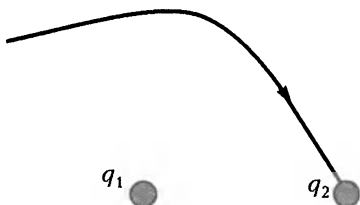


Рис. 6

3. На рисунке 6 изображена одна из силовых линий электрического поля двух точечных зарядов  $q_1$  и  $q_2$ . Каков знак заряда  $q_1$  и абсолютная величина какого заряда больше?

А) Заряд  $q_1$  отрицательный, его величина  $|q_1| > |q_2|$ ;

Б) заряд  $q_1$  отрицательный, его величина  $|q_1| < |q_2|$ ;

В) заряд  $q_1$  положительный, его величина  $q_1 > |q_2|$ ;

Г) заряд  $q_1$  положительный, его величина  $q_1 < |q_2|$ .

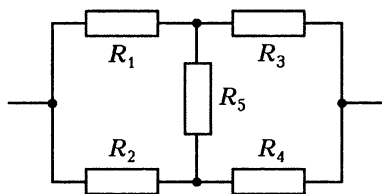


Рис. 7

4. Нужно определить токи, протекающие в цепи (рис.7) через каждый резистор (их сопротивления неизвестны). Какое минимальное число измерений силы тока для этого потребуется?

5. Электрон влетает в область однородного магнитного поля под некоторым углом к плоской границе поля и перпендикулярно линиям индукции. В

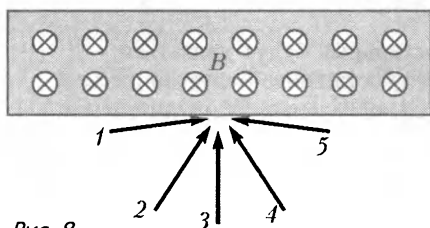


Рис. 8

каком из показанных на рисунке 8 случаев электрон проникнет в область поля на наибольшее расстояние?

6. Пассажир метро, спускаясь по неподвижному эскалатору, насчи-

тал  $N_0 = 300$  ступеней. Шагая с той же скоростью по движущемуся вниз эскалатору, он насчитал  $N_1 = 200$  ступеней. Сколько ступеней он насчитает, если будет спускаться относительно движущегося вниз эскалатора в два раза быстрее?

7. При соскальзывании шайбой массы  $m$  с гладкой горки высотой  $h$  (рис.9) начальная потенциальная энергия шайбы  $mgh$  превращается в кинетическую энергию  $mv_m^2/2$ , т.е. в системе

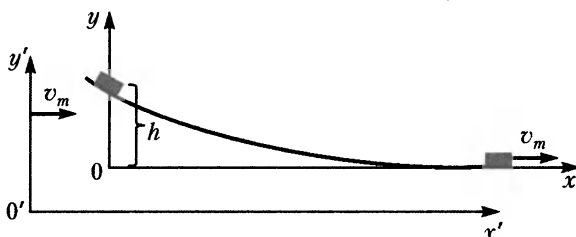


Рис. 9

отсчета  $xOy$ , связанной с землей, выполняется закон сохранения механической энергии. При наблюдении этого соскальзывания в системе отсчета  $x'O'y'$ , которая движется со скоростью  $\vec{v}_m$  вдоль поверхности земли, начальная механическая энергия шайбы равна  $mgh + mv_m^2/2$ , а конечная энергия равна нулю – закон сохранения механической энергии не выполняется. Как это объяснить?

8. На легком жестком стержне закреплены три небольших шарика, изготовленных из различных материалов (рис.10). Как опытным путем определить массу каждого ша-

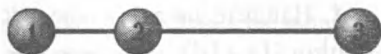


Рис. 10

рика? Можно использовать любые приборы и принадлежности, запрещено деформировать и разрушать стержень и шарики.

*Публикацию подготовили Г.Гайдуков, И.Горбатый*



## НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ЯДЕРНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ «МИФИ»

### Олимпиада «Росатом»

В течение 2013/14 учебного года Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ» проводил традиционную физико-математическую олимпиаду школьников «Росатом». Олимпиада проходила в несколько туров в Москве и еще 27 городах РФ – крупных административных и образовательных центрах страны, а также городах расположения научных и промышленных предприятий атомной отрасли. В олимпиаде приняли участие более 15 тысяч школьников.

Ниже приводятся варианты заданий заключительного тура олимпиады «Росатом» по математике и физике для учащихся 11 класса.

### Заключительный тур

#### МАТЕМАТИКА

1. Найдите числа  $x$  такие, что  $\lg|\sin(x + |x|)|$ ,  $\lg|\sin 3(x + |x|)|$  и  $\lg|\sin 5(x + |x|)|$  являются последовательными членами арифметической прогрессии с ненулевой разностью.

2. Найдите наибольшее число  $l > 0$ , для которого существует интервал длины  $l$  числовой оси, не содержащий решений уравнения  $32\sin^6 x - 48\sin^4 x + 22\sin^2 x - 3 = 0$ .

3. Напишите уравнение окружности с центром в начале координат, на которой лежат все точки с координатами  $(x; y)$  – решениями системы

$$\begin{cases} \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2} = \frac{35}{13}, \\ x + y = 5. \end{cases}$$

4. Папа, мама и Петя 2 часа сидели за праздничным столом и вели беседу. Мама из каждой пятиминутки говорила первую, вторую и третью минуту, папа на каждом семиминутном интервале говорил четвертую и пятую минуту, а Петя на каждом

временном интервале в девять минут говорил третью и четвертую минуту. Сколько минут папа и мама говорили одновременно, а Петя молчал?

5. При каких значениях  $a$  система уравнений

$$\begin{cases} x - y = a, \\ \sin x = \sin(x + 2y) \end{cases}$$

имеет единственное решение в квадрате

$$\begin{cases} -\pi \leq x \leq 0, \\ -\pi \leq y \leq 0? \end{cases}$$

6. Математический бильярд имеет форму параллелограмма  $ABCD$ . На сторонах  $AD$  и  $CD$  соответственно расположены точки  $E$  и  $F$  так, что  $AE : ED = 1 : 2$ , а  $DF : FC = 1 : 3$ . Шар находится в точке  $M$  пересечения прямых  $BF$  и  $CE$ . Известно, что шар, направленный в точку  $N$  борта  $BC$ , отразившись от четырех различных бортов, вернулся в точку  $M$  и, продолжив свое движение, повторил свою предыдущую траекторию. Найдите величину отношения  $BN : NC$ , если известно, что траектория шара – выпуклый четырехугольник.

## ФИЗИКА

1. Две машины выехали одновременно навстречу друг другу из городов  $A$  и  $B$ . Машины встретились на расстоянии  $l$  от  $A$ , затем доехали до городов  $B$  и  $A$  соответственно, развернулись и поехали назад. Вторая встреча машин произошла на расстоянии  $3l/4$  от города  $B$ . Найдите расстояние  $AB$ . Скорости машин постоянны.

2. Тело движется вдоль оси  $x$  из точки с нулевой координатой так, что проекция его скорости на ось  $x$  зависит от координаты  $x$  по закону  $v_x = \alpha\sqrt{x}$ , где  $\alpha$  – известная постоянная. Через какое время после начала движения тело будет иметь координату  $x_0$ ?

3. Два металлических одинаковых полушара радиусом  $R$  каждый расположены так, что между ними имеется очень небольшой зазор (рис.1). Полушары заряжают зарядами  $-Q$  и  $3Q$  ( $Q > 0$ ). Найдите напряженность электрического поля в зазоре между полушарами.

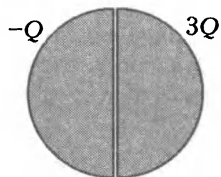


Рис. 1

4. Цилиндрический сосуд закрыт двумя массивными одинаковыми подвижными поршнями (рис.2). Газа между поршнями нет. Из-за неплотных контактов между стенками и нижним

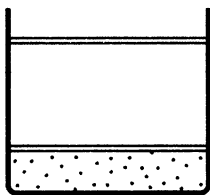


Рис. 2

поршнем газ медленно просачивается в пространство между поршнями. Известно, что когда нижний поршень оказался на высоте  $h$  от дна сосуда, то верхний был на расстоянии  $2h$  от нижнего. На какой высоте от дна будет находиться верхний поршень, когда нижний поршень окажется на дне? Температура постоянна. Контакты между верхним поршнем

и стенками — плотные, трения нет. Атмосферным давлением пренебречь.

5. Два точечных тела с массами  $m$  могут скользить по жестким спицам, расположенным под прямым углом друг к другу (рис.3).

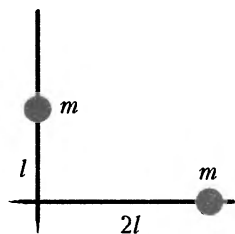


Рис. 3

Тела притягиваются с силой, величина которой  $F$  не зависит от расстояния между ними. В начальный момент тела, которые удерживали на расстояниях  $l$  и  $2l$  от точки пересечения спиц, отпускают. Какое из них первым окажется в точке пересечения спиц? Найдите время его движения до этой точки. Силой тяжести и трением пренебречь.

Публикацию подготовили  
С.Гришин, С.Муравьев

# НОВОСИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

## ФИЗИКА

### Письменный экзамен

#### Вариант 1

1. На прямолинейный переезд между станциями метро «Студенческая» и «Речной вокзал» поезд затратил 4 мин. При этом первую минуту он разгонялся равноускоренно, а последнюю минуту с тем же по абсолютной величине ускорением тормозил. Остальное время поезд двигался с постоянной скоростью 60 км/ч. Чему равно расстояние между этими станциями метро?

2. Два одинаковых теплоизолированных стакана полностью наполнены водой. В первом стакане температура воды на  $\Delta T$  больше, чем во втором. По половине объема воды из каждого стакана слили в третий пустой теплоизолированный сосуд и перемешали. Затем из этого сосуда всю воду разлили обратно по стаканам. Найдите установившуюся разницу температур  $\Delta T'$  воды в стаканах.

3. Маленькая заряженная бусинка может свободно без трения двигаться по тонкому непроводящему кольцу (имеющему форму окружности). На диаметрально противоположных точках кольца закрепили неподвижно два точечных заряда  $q_1$  и  $q_2$  в точках  $A$  и  $B$  соответственно (рис.1). После чего бусинка заняла равновесное положение в точке  $C$ . Бусинка и точечные заряды  $q_1$  и  $q_2$  заряжены одноименно. Найдите угол  $ABC$ .

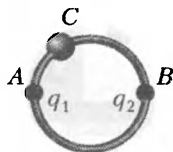


Рис. 1

4. На бесконечных рельсах лежит поперек проводящая перемычка, имеющая массу  $m$  и сопротивление  $R$ . Вся система находится в однородном магнитном поле  $B$ , направленном перпендикулярно перемычке под углом  $\alpha$  к вертикали, как показано на рисунке 2.

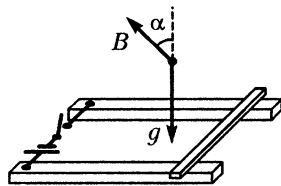


Рис. 2

Между рельсами включают батарейку, и перемычка начинает двигаться. Коэффициент трения между перемычкой и рельсами равен  $\mu$ . Какой должна быть ЭДС батареи  $\mathcal{E}$ , чтобы перемычка, не отрываясь от рельсов, двигалась с установившейся скоростью  $v$ ? Внутренним сопротивлением батареи, сопротивлением рельсов и подводящих проводов пренебречь. Ускорение свободного падения равно  $g$ .

5. Оцените изменение давления в парной с плотно закрытыми дверями и окнами после того, как на раскаленные камни плеснули воду из ковша. Предполагается, что вы хорошо представляете явление, можете сами задать необходимые для решения задачи величины, выбрать их численные значения и получить численный результат.

### Олимпиада школьников «Будущее Сибири»

#### I (отборочный) этап

8 класс

1. К концу невесомой нити, перекинутой через неподвижный блок, прикреплен шар из камня (рис.3). К другому концу нити прикреплены два таких же шара, которые целиком погружены в жидкость плотностью  $\rho_0 = 1000 \text{ кг/м}^3$ . Система находится в равновесии. Определите плотность  $\rho$  камня, из которого сделаны шары. Трения нет.

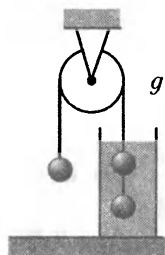


Рис. 3

2. Кусок льда массой  $m_{\text{л}} = 700 \text{ г}$  поместили в калориметр с водой. Масса воды  $m_{\text{в}} = 2,5 \text{ кг}$ , ее температура  $t_{\text{в}} = 5^\circ\text{C}$ , а удельная теплоемкость  $c_{\text{в}} = 4,2 \text{ Дж/(г} \cdot ^\circ\text{C)}$ . После установления теплового равновесия оказалось, что масса льда увеличилась на  $m = 64 \text{ г}$ . Определите начальную температуру льда, если его удельная теплота плавления  $\lambda = 336 \text{ Дж/г}$ , а удельная теплоемкость  $c_{\text{л}} = 2,1 \text{ Дж/(г} \cdot ^\circ\text{C)}$ .

3. Два велосипедиста движутся по прямой дороге с постоянными скоростями. В 13 часов расстояние между ними было 15 км, в 15 часов – 9 км, а в 16 часов – 21 км. В котором часу они встретились?

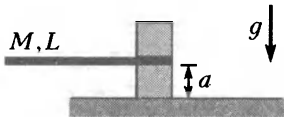


Рис. 4

4. Между двумя одинаковыми кубиками с длиной ребра  $a$ , стоящими точно друг над другом, вдвинута тон-

кая пластинка длиной  $L$  ( $L > 2a$ ) и массой  $M$ . Один из концов пластинки находится вровень с краями кубиков (рис.4). При какой минимальной массе  $m$  кубика возможно такое равновесие?

#### 9 класс

1. Два одинаковых шарика подвешены к невесомым разноплечным рычажным весам (рис.5). Правый шарик полностью погружен в жидкость. Весы находятся в равновесии. Определите плотность материала шариков, если плотность жидкости равна  $\rho_0$ , а длины левого и правого плеч весов равны  $l_1$  и  $l_2$  соответственно.

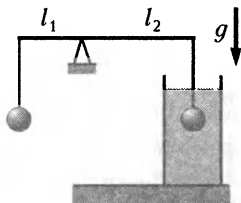


Рис. 5

2. Два пешехода движутся по прямой дороге с постоянными скоростями. В 9 часов расстояние между ними было 3 км, в 10 часов – 1 км, а в 10:30 – 3 км. В котором часу они встретились?

3. Между двумя одинаковыми кубиками с длиной ребра  $a$  и массой  $m$ , стоящими точно друг над другом, вдвинута тонкая пластинка длиной  $L$  ( $L > 2a$ ). Один из концов пластинки находится вровень с краями кубиков (см. рис.4). При какой максимальной массе  $M$  пластинки возможно такое равновесие?

4. Мальчик бросил мяч на стену спортзала, удаленную от него на 5 метров. Мяч упруго отскочил от стены и упал на пол позади мальчика. На каком расстоянии от стены упал мяч, если высшую точку своей траектории он прошел над головой мальчика? Ростом мальчика можно пренебречь.

#### 10 класс

1. Сопротивление между точками  $A$  и  $B$  (рис.6), лежащими на диаметре окружности из однородной проволоки, равно  $R$ . Каким станет это сопротивление, если точки  $C$  и  $D$ , также лежащие на диаметре окружности, соединить перемычкой с бесконечно малым сопротивлением? Угол между отрезками  $AB$  и  $CD$  равен  $45^\circ$ .

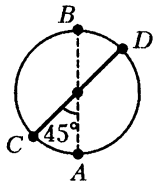


Рис. 6

2. Максимальная масса, которую Ворона может поднять в воздух, составляет  $m_1 = 0,5$  кг. Вороне где-то бог послал кусочек сыру массой  $m_2 = 0,25$  кг в то время, когда она находилась на земле. Найдите минимальное время, через которое Ворона сможет им позавтракать, если для этого ей необходимо взгромоздиться на ель высотой  $h = 15$  м. Считать, что Ворона машет

крыльями в полную силу. Временем торможения пренебречь. Масса Вороны  $m_3 = 0,5$  кг. Ускорение свободного падения принять равным  $g = 10$  м/с<sup>2</sup>.

3. Две бусинки связаны нерастяжимой ниткой длиной  $L$  (рис.7). Вначале нить натянута, правая бусинка лежит на горизонтальной поверхности, а левая

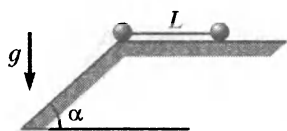


Рис. 7

горизонтальной поверхности, а левая — на самой границе между горизонтальной и длинной наклонной поверхностями. Угол между горизонталью и наклонной поверхностью равен  $\alpha$ . Когда связку бусинок отпускают, она приходит в движение. Через какое

время после этого правая бусинка соскользнет с горизонтальной поверхности? Ускорение свободного падения равно  $g$ . Трением пренебречь.

4. Один конец пружины прикрепили ко дну вертикальной стеклянной колбы, а на другом конце закрепили шарик (рис.8). Длина пружины оказалась равной  $l_1$ . Затем в колбу налили

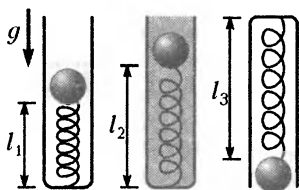


Рис. 8

жидкость так, что шарик оказался полностью погружен. Длина пружины при этом стала равной  $l_2$ . Наконец, жидкость вылили, перевернув колбу. В новом положении равновесия длина пружины составила  $l_3$ . Определите плотность материала шарика, если плотность жидкости равна  $\rho_0$ .

11 класс

1. См. задачу 1 для 10 класса.

2. См. задачу 2 для 10 класса.

3. Вертикальный цилиндрический сосуд закрыт поршнем, на котором лежат две одинаковые гири. Внутри и снаружи сосуда находится воздух. Если одну из гирь убрать, то объем под поршнем увеличится в 1,5 раза. Во сколько раз изменится объем под поршнем, если к двум гирям добавить еще одну такую же?

Трения нет. Температуру воздуха считать постоянной.

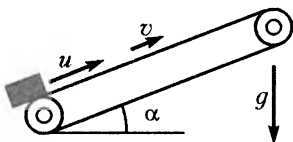


Рис. 9

4. Груз запустили вдоль длинного транспортера со скоростью  $u$  (рис.9). На какую максимальную высоту поднимется груз, если угол между лентой транспортера и гори-

зонталью равен  $\alpha$ , коэффициент трения равен  $\mu$  ( $\mu < \operatorname{tg} \alpha$ )? Известно, что скорость ленты  $v < u$ .

*// (заключительный) этап*

8 класс

1. На зимних Олимпийских играх в Сочи 30 лыжников бежали индивидуальную гонку с раздельным стартом: каждый последующий участник стартовал на 30 с позже предыдущего. При этом продолжительность финиша (т.е. промежуток времени между первым и последним пересечениями финишной черты) составила 5 мин. Первым к финишу пришел спортсмен, стартовавший последним, а последним пришел спортсмен, стартовавший первым. Какой была бы продолжительность финиша, если бы лыжники стартовали в обратном порядке с теми же интервалами и пробежали бы дистанцию с теми же результатами?

2. Цилиндрический деревянный стакан высотой  $H = 8$  см, до краев наполненный водой, плавает в воде. Масса пустого стакана  $m_0 = 80$  г, масса налитой в него воды  $m = 200$  г. Найдите, на какую глубину погружен стакан. Плотность воды в 1,5 раза больше плотности дерева.

3. Для заполнения пустого пруда водой сток воды из пруда уменьшили в 4 раза. В результате за 16 суток пруд заполнился на  $2/3$  части своего объема. Чтобы ускорить заполнение, сток воды перекрыли полностью. Через сколько суток после этого пруд будет полным?

4. В пустой калориметр поместили очень холодный кусок льда и налили стакан кипятка ( $T_k = 100^\circ\text{C}$ ). При этом весь кипяток превратился в лед с установившейся температурой  $T_0 = 0^\circ\text{C}$ . Когда в калориметр налили еще 8 таких же стаканов кипятка, весь лед превратился в воду с установившейся температурой  $T_0 = 0^\circ\text{C}$ . Найдите начальную температуру льда. Теплоемкость воды  $c_v = 4,2 \text{ кДж}/(\text{кг} \cdot ^\circ\text{C})$ , теплоемкость льда  $c_d = 2,1 \text{ кДж}/(\text{кг} \cdot ^\circ\text{C})$ , теплота плавления льда  $\lambda = 336 \text{ кДж}/\text{кг}$ .

9 класс

1. На зимних Олимпийских играх в Сочи на соревнованиях по конькобежному спорту на дистанции 10 км спортсмен из России финишировал первым с результатом 13 мин. Одновременно с ним на финише оказался другой спортсмен, который отстал от лидера на круг. Определите, на сколько позже лидера гонки пришел к финишу отставший спортсмен, если известно,



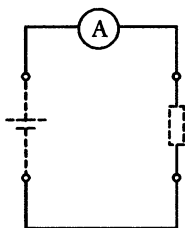


Рис. 10

что последний круг он пробежал с такой же средней скоростью, как и всю дистанцию, а длина круга 400 м.

2. См. задачу 2 для 8 класса.

3. В представленную на рисунке 10 схему включали в различных комбинациях идеальные источники напряжения  $\mathcal{E}_1$  и  $\mathcal{E}_2$  (слева) и сопротивления  $R_1$  и  $R_2$  (справа) и измеряли ток в цепи. Результаты измерений тока в амперах занесли в таблицу. Найдите недостающее число в таблице.

|       | $\mathcal{E}_1$ | $\mathcal{E}_2$ |
|-------|-----------------|-----------------|
| $R_1$ | 1               | 2               |
| $R_2$ | 3               | ?               |

подвижные блоки (рис.11). Концы нитей связаны, и к узлу подвешен груз. При этом динамометр с более жесткой пружиной

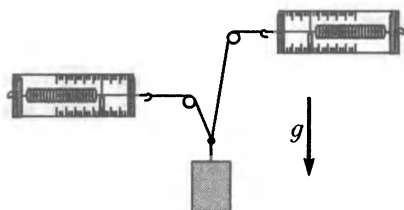


Рис. 11

4. Имеется два динамометра, пружины которых имеют вдвое различающиеся жесткости. Динамометры закреплены, к их концам привязаны нити, которые перекинуты через неподвижные блоки (рис.11). Концы нитей связаны, и к узлу подвешен груз. При этом динамометр с более жесткой пружиной показывает  $F_1 = 1$  Н, а другой показывает  $F_2 = 3,5$  Н. Какими будут показания динамометров, если массу груза увеличить вдвое? Динамометры исправны, трением пренебречь.

5. В скафандр космического пирата вмонтирован реактивный двигатель с управляемым углом тяги. Находясь на поверхности Луны, пират заметил погоню и включил двигатель. На каком максимальном расстоянии от начального положения он сможет оказаться за время  $t$  работы двигателя, оптимальным образом выбрав направление тяги двигателя? Каким при этом должно быть направление его полета: вертикальным, горизонтальным или под иным определенным углом к горизонту? Масса экипированного пирата  $m$ , сила тяги двигателя  $F$ , ускорение свободного падения на Луне  $g_{\text{л}}$  ( $F > mg_{\text{л}}$ ). Изменением массы можно пренебречь. Расстояние, которое пролетел пират, считать малым по сравнению с размером Луны.

10 класс

1. См. задачу 1 для 9 класса.

2. См. задачу 3 для 9 класса.

3. Пружина удерживается в сжатом состоянии с помощью прочной нити (рис.12). На концах пружины находятся два разных шарика.

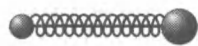


Рис. 12

Известно, что если зафиксировать левый шарик и пережечь нить, то правый шарик полетит со скоростью  $v_1$ , а если, наоборот, зафиксировать правый шарик и пережечь нить, то левый шарик полетит со скоростью  $v_2$ . С какими скоростями полетят эти же шарики, если ни один из них не фиксировать? Пружина во всех трех случаях сжата одинаково.

4. Надутый шарик находится внутри замкнутого сосуда, занимая четвертую часть объема сосуда. При этом давление газа внутри шарика равно  $p_1$ , а снаружи –  $p_2$ . Систему медленно нагревают. При некоторой критической температуре, когда объем шарика увеличился вдвое по сравнению с первоначальным, а разность давлений газа внутри и снаружи шарика стала равной  $\Delta p$ , шарик лопнул. В дальнейшем температура газа в сосуде поддерживалась равной критической. Определите установившееся давление газа в сосуде. Объемом оболочки шарика пренебречь.

5. Край стола имеет закругление радиусом  $r$  (рис.13). С края стола свисает легкая нить, к которой привязан шар радиусом  $R$  и массой  $M$ . За нить под малым углом к поверхности стола шар медленно вытягивают на стол. Каково максимальное значение натяжения нити в процессе вытягивания? Трением пренебречь.

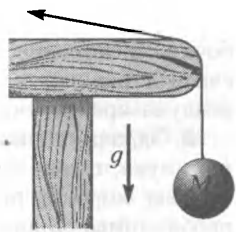


Рис. 13

11 класс

1. См. задачу 1 для 8 класса.

2. Схема состоит из параллельно соединенных заряженного конденсатора и идеального вольтметра. Вольтметр показывает 9 В. Параллельно к этой схеме присоединили незаряженный конденсатор другой емкости, и вольтметр показал 6 В. Затем этот конденсатор отсоединили от схемы, полностью разрядили и опять присоединили параллельно к схеме. Какое напряжение при этом покажет вольтметр?

3. Три одинаковые вертикально стоящие замкнутые цилиндрические цистерны соединены последовательно гибкими шлангами на середине высоты и снабжены клапанами для выпуска воздуха (рис.14). Рабочий начал медленно подавать воду в крайнюю правую цистерну, предварительно открыв ее воздушный клапан. Клапаны двух других цистерн остались закрытыми,

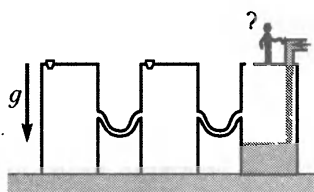


Рис. 14

так что воздух из них не выходил. К моменту когда крайняя правая цистерна оказалась полностью наполненной, левая оказалась наполненной на  $3/11$  своего объема. Какая доля объема средней цистерны заполнилась водой? Объемом соединительных шлангов пренебречь.

4. Электрический насос качает воду из озера (рис.15). Тонкая струя воды из открытого конца шланга, расположенного на высоте  $h$ , направлена в бочку высотой  $H$ . Расстояние между концом шланга и бочкой по горизонтали равно  $d$ . Сколько электроэнергии нужно затратить, чтобы накачать в бочку количество воды массой  $M$ ? Считать,

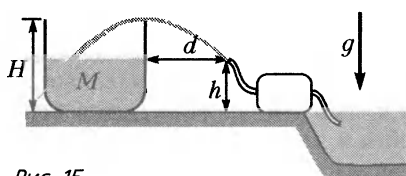


Рис. 15

что верхняя точка струи находится непосредственно над краем бочки. Ускорение свободного падения равно  $g$ . КПД насоса считать равным 1, трением воды о шланг и сопротивлением воздуха пренебречь.

5. **Задача-оценка.** Оцените скорость вылета стрелы из спортивного лука, тетива которого натягивается рукой. Предполагается, что вы хорошо представляете явление, можете сами задать необходимые для решения задачи величины, выбрать их числовые значения и получить численный результат.

6. **Задача-демонстрация** (демонстрируется видеоролик). Один конец упругой металлической линейки зажат между тяжелыми грузами, другой – свободный (рис.16). Сверху на линейку равномерно по всей ее длине насыпана гречневая крупа. Свободный конец линейки отгибают вниз и затем отпускают. Часть крупы слетает с линейки. Однако при этом на линейке возникает граница, левее которой почти вся крупа слетела, а правее – осталась на месте. Объясните наблюдаемое явление.

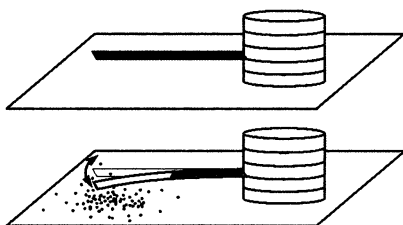


Рис. 16

Однако при этом на линейке возникает граница, левее которой почти вся крупа слетела, а правее – осталась на месте. Объясните наблюдаемое явление.

Публикацию подготовили  
Е.Жданов, М.Махмудиан, А.Погосов, Д.Похабов

## РОССИЙСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ НЕФТИ И ГАЗА ИМЕНИ И.М.ГУБКИНА

### ФИЗИКА

#### Письменный экзамен

Вступительный экзамен проводился для тех абитуриентов, которые имели право не сдавать ЕГЭ: для выпускников техникумов, выпускников школ прошлых лет, иностранцев и освобожденных от ЕГЭ по состоянию здоровья. Экзамен оценивался по 100-балльной шкале. Задачи В1–В12 в каждом варианте оценивались максимум в 5 баллов, задачи С1–С4 – максимум в 10 баллов каждая.

#### Вариант 1

**В1.** За две секунды движения тело прошло путь 20 м, при этом его скорость, не меняя направления, увеличилась в 3 раза по сравнению с первоначальной. Каково было ускорение тела?

**В2.** На какой высоте (в км) над поверхностью Земли ускорение свободного падения на 36% меньше, чем на земной поверхности? Радиус Земли 6400 км.

**В3.** Стальная пуля массой 4 г, летящая горизонтально со скоростью 400 м/с, попадает в центр боковой грани неподвижного стального бруска, масса которого 2 кг. После столкновения пуля отскакивает в противоположную сторону со скоростью 350 м/с. Чему равна скорость бруска после столкновения (в см/с)?

**В4.** Вагон массой 2 т, двигаясь со скоростью 1 м/с, наезжает на вертикальную стенку, в результате чего сжимаются две буферные пружины жесткостью 100 кН/м каждая. Найдите максимальную деформацию пружин (в см).

**В5.** Давление столба воды  $1,5 \cdot 10^5$  Па. Плотность воды  $10^3$  кг/м<sup>3</sup>. Определите высоту столба воды.

**В6.** Сколько тысяч молекул воздуха находится в 3 мм<sup>3</sup> сосуда при 27 °С, если воздух в сосуде откачан до давления 1,66 мкПа? Универсальная газовая постоянная 8300 Дж/(кмоль · К), число Авогадро  $6 \cdot 10^{26}$  кмоль<sup>-1</sup>.

**В7.** В цилиндре под поршнем находится некоторая масса газа при температуре 400 К, занимающая при давлении 75 кПа объем 10 л. На сколько градусов надо охладить газ при неизменном давлении, чтобы при этом была совершена работа по его сжатию, равная 150 Дж?

**В8.** В однородном электрическом поле напряженностью 40 кВ/м, вектор которой направлен вертикально вниз, на шелковой нити висит шарик массой 0,2 кг с зарядом 0,2 мКл. Найдите силу натяжения нити.

**В9.** Какое количество энергии (в кДж) расходуется на нагревание электроутюга в течение 50 с, если напряжение в сети равно 220 В, а сила тока равна 3 А?

**В10.** Проводник длиной 2 м движется со скоростью 5 м/с перпендикулярно линиям индукции однородного магнитного поля. Определите величину индукции магнитного поля (в миллитеслах), если на концах проводника возникает разность потенциалов 0,06 В.

**В11.** Волна с частотой 25 Гц распространяется в некоторой среде, причем разность фаз в двух точках, находящихся на расстоянии 15 м одна от другой на одной прямой с источником колебаний, равна  $\pi$ . Найдите скорость распространения волны в этой среде.

**В12.** При увеличении частоты падающего на металл света в два раза задерживающее напряжение для фотоэлектронов увеличивается в три раза. Частота первоначально падающего света  $10^{15}$  Гц. Определите длину волны (в нм) света, соответствующую «красной границе» для этого металла. Скорость света равна  $3 \cdot 10^8$  м/с.

**С1.** На доске массой 4 кг, лежащей на горизонтальном полу, находится брусок массой 1 кг. Коэффициент трения между бруском и доской 0,2, а между доской и полом 0,4. Какую наименьшую горизонтальную силу надо приложить к доске, чтобы брусок с нее соскользнул?

**С2.** На гладкой горизонтальной плоскости лежит доска длиной 2,5 м, на одном конце которой находится маленький брусок. Какую минимальную скорость надо сообщить бруску, чтобы он достиг другого конца доски? Масса доски 4 кг, масса бруска 1 кг, коэффициент трения между ними 0,4.

**С3.** Идеальный одноатомный газ в количестве 1 моль находится при температуре 200 К. Газ изохорно нагревают до температуры 400 К, а затем в 3 раза увеличивают его объем так, что давление линейно зависит от объема. Какое количество теплоты получил газ в двух процессах, если конечное давление

равно начальному? Универсальная газовая постоянная  $8300 \text{ Дж}/(\text{кмоль} \cdot \text{К})$ .

**С4.** Протон в магнитном поле с индукцией  $0,03 \text{ Тл}$  движется по дуге окружности радиусом  $10 \text{ см}$ . После вылета из магнитного поля он полностью тормозится электрическим полем. Чему равна тормозящая разность потенциалов, если отношение заряда протона к его массе равно  $10^8 \text{ Кл/кг}$ ?

*Вариант 2*

**В1.** Торможение автомобиля до полной остановки заняло время  $5 \text{ с}$  и происходило с постоянным ускорением  $4 \text{ м/с}^2$ . Найдите тормозной путь.

**В2.** Во сколько раз уменьшится сила тяготения между двумя одинаковыми однородными шарами, если вначале шары соприкасались друг с другом, а затем один из шаров отодвинули на расстояние, равное двум диаметрам шаров?

**В3.** Летящий со скоростью  $60 \text{ м/с}$  снаряд разорвался на два осколка. Осколок массой  $m_1 = m/3$ , где  $m$  – масса снаряда, продолжает полет в том же направлении со скоростью  $240 \text{ м/с}$ . Чему равна величина скорости второго осколка?

**В4.** Пуля массой  $4 \text{ г}$ , летевшая горизонтально со скоростью  $800 \text{ м/с}$ , пробивает доску и вылетает из нее со скоростью  $400 \text{ м/с}$ . Найдите абсолютную величину работы, совершенной над пулей силой сопротивления со стороны доски.

**В5.** К малому поршню гидравлического пресса приложена сила  $15 \text{ Н}$ , под действием которой за один ход он опускается на  $15 \text{ см}$ , вследствие чего большой поршень поднимается на  $5 \text{ мм}$ . Какая сила давления передается при этом на большой поршень?

**В6.** Во сколько раз в  $6 \text{ г}$  водорода больше молекул, чем в  $16 \text{ г}$  кислорода? Молярная масса водорода  $2 \text{ кг/кмоль}$ , кислорода  $32 \text{ кг/кмоль}$ .

**В7.** Определите начальную температуру (в кельвинах)  $70 \text{ г}$  азота, если при изобарном нагревании до  $350 \text{ К}$  газ совершил работу  $1,66 \text{ кДж}$ . Молярная масса азота  $28 \text{ кг/кмоль}$ , универсальная газовая постоянная  $8300 \text{ Дж}/(\text{кмоль} \cdot \text{К})$ .

**В8.** Найдите величину ускорения, которое приобретает частица массой  $0,8 \text{ г}$  с зарядом  $4 \text{ мКл}$  под действием однородного электрического поля с напряженностью  $1000 \text{ В/м}$ .

**В9.** По проводнику сопротивлением  $6 \text{ Ом}$  пропускали постоянный ток в течение  $7 \text{ с}$ . Какое количество теплоты выделилось в проводнике за это время, если через его сечение прошел заряд, равный  $7 \text{ Кл}$ ?

**В10.** Ток, протекающий по обмотке катушки, равномерно изменяется на 10 А за 0,25 с. При этом возбуждается ЭДС самоиндукции, равная 240 В. Определите индуктивность катушки.

**В11.** Найдите скорость распространения звука в материале, в котором колебания с периодом 0,02 с вызывают звуковую волну, имеющую длину 15 м.

**В12.** Сколько фотонов попадает за 1 с в глаз человека, если глаз воспринимает свет с длиной волны 0,66 мкм при мощности светового потока  $1,2 \cdot 10^{-16}$  Вт? Постоянная Планка  $6,6 \cdot 10^{-34}$  Дж·с, скорость света  $3 \cdot 10^8$  м/с.

**С1.** Тело массой 2 кг вращается в вертикальной плоскости на нити длиной 1 м. Когда тело при подъеме проходит точку, расположенную на 0,5 м ниже точки подвеса нити, она обрывается. После этого тело поднимается на 4 м выше точки подвеса. Чему равно натяжение нити перед обрывом?

**С2.** Горизонтально летящая пуля попадает в неподвижный деревянный шар с массой, в 3 раза большей, чем у пули, и пробивает его по диаметру. После вылета из шара скорость пули стала в 2,5 раза меньше первоначальной. Сколько процентов первоначальной энергии пули перешло при этом в тепло?

**С3.** Идеальный одноатомный газ в количестве 2 моль находится при температуре 300 К. Объем газа уменьшают в 1,5 раза так, что давление линейно зависит от объема, а затем газ изобарно расширяют до прежнего объема. Какое количество теплоты получил газ в двух процессах, если конечное давление на 5% больше начального? Универсальная газовая постоянная 8300 Дж/(кмоль·К).

**С4.** Катушка, имеющая 100 витков и расположенная перпендикулярно магнитному полю с индукцией 6 Тл, поворачивается за 1 с на угол 90°. За это время в катушке наводится ЭДС со средним значением 0,9 В. Определите площадь поперечного сечения катушки (в см<sup>2</sup>).

### *Вариант 3*

**В1.** От движущегося поезда отцеплен последний вагон. Поезд продолжает движение с той же скоростью. Считая, что вагон движется равнозамедленно, найдите, во сколько раз путь, пройденный вагоном до его остановки, меньше пути, пройденного поездом к этому моменту.

**В2.** Сколько процентов составляет ускорение свободного падения на поверхности Марса от ускорения свободного падения на Земле, если радиус Земли в два раза больше радиуса Марса, а масса Земли в 10 раз больше массы Марса?

**В3.** На подножку вагонетки, которая движется по рельсам со скоростью  $1 \text{ м/с}$ , прыгает человек массой  $80 \text{ кг}$  в направлении, перпендикулярном ходу вагонетки. Масса вагонетки  $120 \text{ кг}$ . Определите скорость вагонетки вместе с человеком (в  $\text{см/с}$ ).

**В4.** С какой высоты падает без начальной скорости камень, если его скорость при падении на землю равна  $18 \text{ м/с}$ , а работа силы сопротивления воздуха равна (по модулю)  $76 \text{ Дж}$ ? Масса камня  $2 \text{ кг}$ .

**В5.** Высота столба ртути в ртутном барометре  $65 \text{ см}$ . Какой высоты столб воды (в  $\text{см}$ ) создает такое же давление? Плотность ртути  $13600 \text{ кг/м}^3$ , плотность воды  $1000 \text{ кг/м}^3$ .

**В6.** Какую массу (в граммах) имеют  $9 \cdot 10^{23}$  молекул азота? Молярная масса азота  $28 \text{ кг/кмоль}$ . Число Авогадро  $6 \cdot 10^{23} \text{ моль}^{-1}$ .

**В7.** На сколько градусов увеличилась температура одного моля идеального газа, если при постоянном давлении его внутренняя энергия увеличилась на  $1 \text{ кДж}$ , а теплоемкость одного моля при постоянном давлении больше, чем универсальная газовая постоянная, на  $12,5 \text{ Дж/(моль} \cdot \text{К)}$ ?

**В8.** Шарик массой  $4,5 \text{ г}$  и зарядом  $0,2 \text{ мКл}$  помещен в масло плотностью  $800 \text{ кг/м}^3$ . Плотность материала шарика  $1500 \text{ кг/м}^3$ . Определите напряженность электрического поля, в которое следует поместить шарик, чтобы он находился в равновесии.

**В9.** Два проводника соединены параллельно и подключены к сети постоянного напряжения. Длина первого проводника в  $3$  раза больше, а площадь его поперечного сечения в  $15$  раз больше, чем у второго. В проводниках выделяется одинаковая мощность. Во сколько раз удельное сопротивление первого проводника больше, чем второго?

**В10.** При пропускании через катушку тока силой  $5 \text{ А}$  индукция магнитного поля в катушке оказалась равной  $3 \text{ Тл}$ . Определите индуктивность катушки, если площадь ее поперечного сечения  $100 \text{ см}^2$ , а число витков  $1500$ .

**В11.** Радиостанция работает на длине волны  $15 \text{ м}$ . Сколько колебаний несущей частоты происходит в течение одного периода звуковых колебаний с частотой  $25 \text{ кГц}$ ? Скорость света равна  $3 \cdot 10^8 \text{ м/с}$ .

**В12.** Пары некоторого металла в разрядной трубке начинают излучать свет при напряжении на электродах  $3,3 \text{ В}$ . Чему равна длина волны возникающего излучения (в  $\text{нм}$ )? Постоянная Планка  $6,6 \cdot 10^{-34} \text{ Дж} \cdot \text{с}$ , заряд электрона  $1,6 \cdot 10^{-19} \text{ Кл}$ , скорость света  $3 \cdot 10^8 \text{ м/с}$ .



**С1.** К концам нити, перекинутой через легкий блок, прикрепili грузы массами 3 кг и 5 кг. К оси блока приложили силу, направленную вертикально вверх и равную 120 Н. С каким ускорением будет подниматься блок?

**С2.** В шар массой 250 г, висающий на нити длиной 50 см, попадает и застревает в нем горизонтально летящая пуля массой 10 г. При какой минимальной скорости пули шар после этого совершит полный оборот в вертикальной плоскости?

**С3.** Идеальный одноатомный газ в количестве 1 моль находится при температуре 200 К. Объем газа увеличивают в 2 раза так, что давление линейно зависит от объема и уменьшается на 20%, а затем газ изохорно нагревают до первоначального давления. Какое количество теплоты получил газ в двух процессах? Универсальная газовая постоянная 8300 Дж/(кмоль · К).

**С4.** Два иона, имеющие одинаковые заряды, но различные массы, влетели в однородное магнитное поле. Первый начал двигаться по окружности радиусом 8 см, второй – по окружности радиусом 2 см. Во сколько раз масса первого иона больше, чем масса второго, если известно, что они прошли одинаковую разность потенциалов?

*Публикацию подготовил А.Черноуцан*

## САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

### *Политехническая олимпиада школьников*

Политехническая олимпиада школьников в 2013/14 учебном году проводилась по трем предметам: математике, физике и информатике. Отборочный тур проходил заочно с применением интернет-технологии. Задания и правила выполнения были вывешены на официальном сайте олимпиады. Победители и призеры отборочного тура были приглашены к участию в заключительном туре, который прошел в Санкт-Петербургском государственном политехническом университете в форме очного письменного испытания.

Информацию об олимпиаде 2014/15 учебного года можно получить на сайтах СПбПУ:

[www.spbstu.ru](http://www.spbstu.ru) и [www.olymp.spbstu.ru](http://www.olymp.spbstu.ru)

Ниже приводятся задания олимпиады 2013/14 учебного года по математике, физике и информатике.

### МАТЕМАТИКА

#### *Отборочный тур*

1. В кассе находятся купюры по 10, 100 и 1000 рублей, причем купюр каждого достоинства не более девяти. Сумма количества десятирублевых купюр и удвоенного количества купюр по тысяче рублей в четыре раза больше количества сторублевых купюр. Найдите общую сумму денег в кассе, если она кратна 53.

2. Найдите сумму коэффициентов при нечетных степенях многочлена

$$P(x) = (4x^4 - 4x^2 + 1)^4 (3x^2 + x + 1)^3.$$

3. Магазин повысил цену товара сначала на 20%, а затем еще на 10% (от новой цены). На сколько процентов всего возросла цена товара по отношению к начальной цене?

4. Решите уравнение  $\sqrt{-x^2 - 10x} = 3x + 20$ .

5. Найдите значение  $3\operatorname{ctg} \arccos(-4/5)$ .

6. Найдите десятичную дробь – корень уравнения  $\cos \pi x - \sin \pi x = \sqrt{2}$  на отрезке  $[-1; 1]$ .

7. Найдите  $3^x$ , если  $3^x \cdot 5^{\log_3 5} = 3 \cdot 5^x$ .

8. Числа  $1/243$ ;  $1/3$ ;  $243$  являются элементами геометрической прогрессии. Какое наибольшее значение может принимать ее знаменатель?

9. В усеченный конус вписан шар. Найдите сумму радиусов оснований усеченного конуса, если площадь его боковой поверхности равна  $9\pi$ .

10. Найдите наибольшее из значений параметра  $a$ , при которых система уравнений

$$\begin{cases} |x| + |y| = 2, \\ xy = a \end{cases}$$

имеет решения, а их количество не более трех.

### *Заключительный тур*

1. Найдите все пары  $(x, y)$  натуральных чисел, удовлетворяющие уравнению

$$x^2 - xy - 12y^2 + 18x + 33y = -28.$$

2. Пусть  $A$  – такое подмножество множества натуральных чисел от 1 до 35, что любое число из  $A$  не является натуральной степенью никакого другого числа из  $A$ . Какое максимальное количество элементов может содержаться в  $A$ ?

3. Найдите меньший корень уравнения

$$3^{x^2+2x} - 3^{x+1} = 2 \cdot 3^{3-x^2}.$$

4. Найдите сумму всех двузначных натуральных чисел  $k$ , для которых  $3 \cdot 6^{12} + 17^k$  делится на 5 без остатка.

5. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} (2-x)^2 y^2 + 4 = 2(4-x^2)y - 4x, \\ (2-x)y = 5x - 3x^2. \end{cases}$$

6. При каких значениях  $a \leq 0$  точка  $(-\pi/4; 0)$  будет центром симметрии графика функции  $y = \frac{a - \sin x}{a - \cos x}$ ;  $x \in [-\pi/2; 0]$ ?

7. Решите неравенство  $\sin 2x - 2\sqrt{2}(\sin x + \cos x) \leq -3$ .

8. В треугольнике  $ABC$  площади 45 точка  $P$  лежит на стороне  $AC$ ,  $\frac{AP}{PC} = \frac{4}{3}$ , точка  $Q$  лежит на  $BC$ ,  $\frac{BQ}{QC} = 2$ ;  $AQ$  и  $BP$  пересекаются в точке  $T$ . Найдите площадь треугольника  $ABT$ .

9. В прямой призме  $ABCA_1B_1C_1$  угол  $ABC$  прямой,  $AA_1 = 2$ ,  $AB = BC = 1$ . Пусть  $D$  – середина ребра  $BB_1$ ,  $G$  – точка на гипотенузе  $AC$ . Плоскость  $A_1DG$  отсекает призму на две части, объемы которых относятся как 47:23, считая от части, содержащей основание  $A_1B_1C_1$ . Найдите отрезок  $AG$ .

10. Паром через Керченский пролив отправляется через каждые два часа с 6-00 до 24-00 включительно. Стоянка парома 15 мин. Автомобиль может прибыть в порт в любое время. С какой вероятностью время ожидания посадки  $t \geq 30$  мин?

## ФИЗИКА

### Отборочный тур

1. Артиллеристы произвели выстрел из зенитного орудия. Снаряд вылетел со скоростью  $v = 605$  м/с под углом  $\alpha = 61^\circ$  к горизонту и взорвался в верхней точке своей траектории. Через какой промежуток времени после выстрела артиллеристы услышат звук взрыва? Результат выразите в секундах и представьте с точностью до целой части. Скорость звука в воздухе считать равной  $v_{зв} = 337$  м/с. (10 баллов)

2. Шайба, скользящая по льду, налетает со скоростью  $v = 8$  м/с на покоящуюся шайбу, масса которой в  $k = 6$  раз меньше, чем у движущейся. Удар центральный, абсолютно упругий. Коэффициент трения шайб о лед одинаков и равен  $\mu = 0,17$ . На каком расстоянии друг от друга остановятся шайбы? Результат выразите в метрах и представьте с точностью до целой части. (10 баллов)

3. Деревянный шарик лежит в пустом стакане. В стакан наливают воду до тех пор, пока шарик не перестает оказывать давление на дно. При этом в воде оказывается  $k = \frac{7}{21}$  всего объема шарика. Затем в стакан аккуратно добавляют некоторую несмешивающуюся с водой жидкость до тех пор, пока она полностью не покроет шарик. При этом в воде оказывается  $n = \frac{9}{31}$  всего объема шарика. Определите плотность добавленной жидкости. Результат выразите в  $\text{кг/м}^3$  и представьте с точностью до целой части. (10 баллов)

4. В теплоизолированном сосуде жесткая теплопроводящая неподвижная перегородка разделяет весь объем на две равные части, в одной из которых находится 7,2 моль гелия, а в другой – 2,0 моль аргона. Сначала среднеквадратичная скорость атомов аргона в 12 раз превышала среднеквадратичную скорость атомов гелия. Определите отношение давления гелия к давлению

аргона после установления теплового равновесия. Результат представьте в виде десятичной дроби с точностью до десятых долей. (10 баллов)

5. Один моль идеального одноатомного газа совершает циклический процесс, состоящий из изотермы, изобары и адиабаты. Изотермическое расширение происходит при температуре  $T = 349$  К, при этом совершается работа  $A_T = 11,1$  кДж. При изобарном сжатии объем газа уменьшается в  $n = 7$  раз. Найдите полную работу, совершаемую газом в этом цикле. Результат представьте в килоджоулях в виде десятичной дроби с точностью до десятых долей. (10 баллов)

6. Два разных нагревателя, сопротивления которых  $R_1 = 54$  Ом и  $R_2 = 80$  Ом, при поочередном подключении к источнику тока доводят 5 литров воды до кипения за одно и то же время. Определите внутреннее сопротивление источника тока. Результат представьте в омах с точностью до целой части. (10 баллов)

7. Пучок электронов влетает в пространство, где одновременно существуют однородное электрическое поле, напряженность которого  $E = 0,7$  В/м, и магнитное поле с индукцией  $B = 3,4$  Тл. Исходная скорость электронов  $v_0 = 12,8$  км/с сонаправлена с индукцией магнитного поля и противоположна напряженности электрического поля. Определите скорость электронов, прошедших путь  $s = 7$  мм. Результат представьте в км/с с точностью до целой части. (10 баллов)

8. Проволочный контур в виде равностороннего треугольника со стороной  $a = 17$  см находится в однородном магнитном поле с индукцией  $B = 1,4$  Тл. Линии индукции перпендикулярны плоскости контура. При деформировании контура в квадрат по нему протек заряд  $q = 1,2 \cdot 10^{-6}$  Кл. Определите сопротивление контура. Результат представьте в омах с точностью до целой части. (10 баллов)

9. Плоский предмет расположен перед линзой с оптической силой  $D = 9$  дптр параллельно плоскости линзы. При этом его изображение в  $\Gamma = 6$  раз больше самого предмета. Предмет передвигают вдоль оптической оси и снова получают его изображение с тем же увеличением. На какое расстояние был передвинут предмет? Результат представьте в миллиметрах с точностью до целой части. (10 баллов)

10. Три одинаковые металлические пластины 1, 2 и 3, каждая площадью  $S = 3$  см<sup>2</sup>, расположены в вакууме параллельно друг другу. Расстояние между парами пластин 1–2 и 2–3 одинаково и равно  $d = 0,8$  мм. Пространство между пластинами 1 и 2

заполнено диэлектриком с проницаемостью  $\epsilon = 3,5$ . Пластины 1 и 3 соединены между собой проводником. На пластину 2 со стороны пластины 3 падает монохроматический свет с длиной волны  $\lambda = 291$  нм. Работа выхода электронов из металла пластин  $A = 3,12$  эВ. Найдите модуль максимального заряда пластины 1, если изначально все пластины не были заряжены. Результат представьте в пикокулонах с точностью до целой части. (10 баллов)

### Заключительный тур

1. Со склона горы с углом наклона к горизонту  $\alpha = 30^\circ$  производится выстрел из миномета. Начальная скорость мины равна  $v_0 = 120$  м/с и направлена перпендикулярно склону. Найдите время полета мины до ее падения на тот же склон. Сопротивлением воздуха пренебречь, ускорение свободного падения  $g = 10$  м/с<sup>2</sup>. (15 баллов)

2. После абсолютно упругого столкновения с исходно неподвижным ядром атома гелия  ${}^4_2\text{He}$  альфа-частица потеряла  $\eta = 1/4$  своей первоначальной энергии. Найдите угол между вектором начальной скорости альфа-частицы и направлением ее движения после рассеяния. (10 баллов)

3. В двух теплоизолированных жестких сосудах, соединенных тонкой трубкой с краном, находится один и тот же одноатомный идеальный газ. Давление в обоих сосудах одинаково, объем первого сосуда в  $n = 3$  раза больше, чем второго. Температуры газа в сосудах равны  $T_1 = 500$  К и  $T_2 = 700$  К соответственно. Найдите температуру газа после открытия крана и установления теплового равновесия. Теплоемкостью сосудов можно пренебречь. (10 баллов)

4. В электрической схеме (рис.1) сопротивления резисторов  $R$  вдвое больше сопротивлений резисторов  $r$ , а общее сопротивление схемы, измеренное между входами 1 и 2, равно 20 Ом. При подключении схемы к источнику постоянного напряжения показания вольтметра равны 14 В. Найдите силу тока, протекающего через амперметр. Измерительные приборы считать идеальными. (20 баллов)

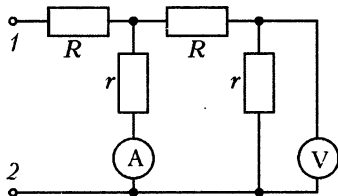


Рис. 1

5. Ион начинает движение в вязкой среде во взаимно перпендикулярных однородных электрическом и магнитном полях. Сила сопротивления среды пропорциональна скорости движе-

ния иона. Напряженность электрического поля равна  $E$ , а индукция магнитного поля –  $B$ . Найдите установившуюся скорость движения иона в скрещенных полях, если при выключении магнитного поля его скорость стремится к значению  $v_0$ . (30 баллов)

6. На собирающую линзу падает сходящийся пучок лучей. После прохождения через линзу лучи пересекаются в точке, лежащей на расстоянии 5 см от линзы. Если линзу убрать, то точка пересечения лучей сдвинется на 15 см. Нарисуйте ход лучей и определите оптическую силу линзы. (15 баллов)

## ИНФОРМАТИКА

### Отборочный тур

1. Вот таблица MS Excel и составленная по ней диаграмма (рис.2). У части ячеек цвет фона и шрифта совпадают. Формула из A3 (она видна в строке формул) растажирована в ячейки B3:D3. Диаграмма построена по значениям ячеек A3:D3. Определите сумму значений ячеек диапазона A2:D2.

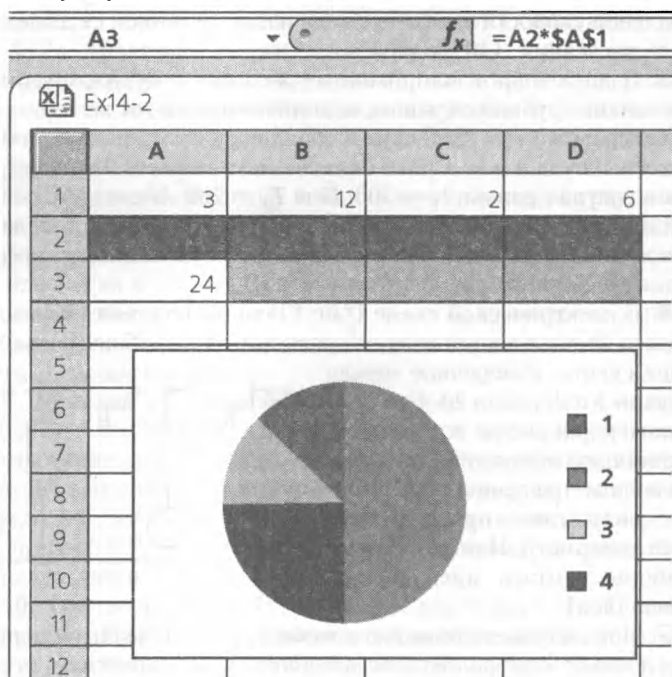


Рис. 2

2. После выполнения следующего алгоритма

$A := A \text{ XOR } B$

$B := A \text{ XOR } B$

$A := A \text{ XOR } B$

переменные A и B получили значения 177 и 29 соответственно. Какими были значения A и B до выполнения алгоритма? В качестве ответа введите сумму значений.

3. Установите соответствие между принятыми в IT аббревиатурами и их значениями (табл. 1):

Таблица 1

|          |   |
|----------|---|
| 1. RGB   | 1. Центральный процессор  |
| 2. CMYK  | 2. Накопитель на жестком магнитном диске                              |
| 3. CPU   | 3. Поисковая оптимизация  |
| 4. HTTP  | 4. Язык программирования, близкий к естественному языку               |
| 5. SEO   | 5. Схема формирования цвета, применяемая в полиграфии                 |
| 6. CAD   | 6. Система автоматизированного проектирования                         |
| 7. ИИТУ  | 7. Аддитивная модель формирования цвета на экране                     |
| 8. HDD   | 8. Протокол передачи гипертекста в сети Интернет                      |
| 9. ЯПВУ  | 9. Язык разметки гипертекста  |
| 10. HTML | 10. Профильный институт в составе Политеха, готовящий IT-специалистов |

4. Дан алгоритм (рис.3), описанный в виде блок-схемы (mod – остаток от деления) При каких натуральных N данный алгоритм для  $M = 666$  выведет ровно 5 чисел? В качестве ответа введите сумму всех возможных значений N.

5. В таблице 2 представлены 6 алгоритмов, описанных на псевдокоде. Переменные A, B, C – целочисленные. Операция mod – остаток от деления, div – целочисленное деление,  $\neq$  – знак «не равно». Поставьте в соответствие имена алгоритмов и выводимые ими результаты при  $A = 5$ ,  $B = 2$ .

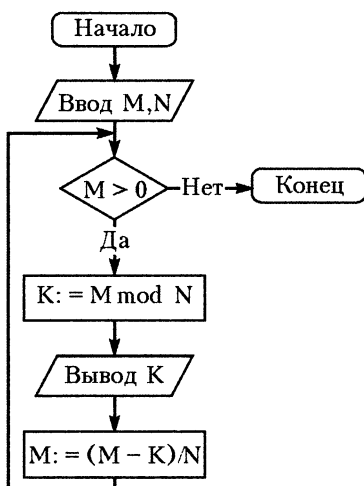


Рис. 3



Таблица 2

|  |   |   |
|--|---|---|
| <b><u>Алг</u></b> Раз<br><b><u>Нач</u></b><br><b><u>Ввод</u></b> А, В<br>$C := 0$<br><b><u>Пока</u></b> $A > B$ <b><u>НЦ</u></b><br>$C := C + 1$<br>$A := A - B$<br><b><u>КЦ</u></b><br><b><u>Вывод</u></b> С<br><b><u>Кон</u></b>   | <b><u>Алг</u></b> Два<br><b><u>Нач</u></b><br><b><u>Ввод</u></b> А, В<br>$C := 0$<br><b><u>Пока</u></b> $B > 0$ <b><u>НЦ</u></b><br>$C := C * 10 + A$<br>$A := B - 1$<br><b><u>КЦ</u></b><br><b><u>Вывод</u></b> С<br><b><u>Кон</u></b>   | <b><u>Алг</u></b> Три<br><b><u>Нач</u></b><br><b><u>Ввод</u></b> А, В<br>$C := 1$<br><b><u>Пока</u></b> $A > B$ <b><u>НЦ</u></b><br>$A := A - 1$<br>$C := C * B$<br><b><u>КЦ</u></b><br><b><u>Вывод</u></b> С<br><b><u>Кон</u></b>  |
| <b><u>Алг</u></b> Четыре<br><b><u>Нач</u></b><br><b><u>Ввод</u></b> А, В<br>$A := A * B * (A + B) + A + B$<br>$C := 0$<br><b><u>Пока</u></b> $A > 0$ <b><u>НЦ</u></b><br>$C := C + (A \bmod 10)$<br>$A := A \div 10$<br><b><u>КЦ</u></b><br><b><u>Вывод</u></b> С<br><b><u>Кон</u></b> | <b><u>Алг</u></b> Пять<br><b><u>Нач</u></b><br><b><u>Ввод</u></b> А, В<br><b><u>Если</u></b> $A > B$ <b><u>То</u></b><br>$C := A$<br>$A := B$<br><b><u>Иначе</u></b><br>$C := B$<br><b><u>Всё</u></b><br><b><u>Пока</u></b> $C < > A$ <b><u>НЦ</u></b><br><b><u>Если</u></b> $C > A$ <b><u>То</u></b><br>$C := C - A$<br><b><u>Иначе</u></b><br>$A := A - C$<br><b><u>Всё</u></b><br><b><u>КЦ</u></b><br><b><u>Вывод</u></b> С<br><b><u>Кон</u></b> | <b><u>Алг</u></b> Шесть<br><b><u>Нач</u></b><br><b><u>Ввод</u></b> А, В<br>$C := 0$<br><b><u>Пока</u></b> $C < 100000$ <b><u>НЦ</u></b><br>$C := 1000 * C + A * 101$<br>$C := C + B * 10$<br><b><u>КЦ</u></b><br>$C := C / 7$<br>$C := C / 11$<br>$C := C / 13$<br><b><u>Вывод</u></b> С<br><b><u>Кон</u></b> |

6. Имеется портативный медицинский прибор, позволяющий фиксировать в течение суток температуру тела больного в 8

точках. На теле пациента закрепляются портативные термометры, сигналы с которых поступают в маленький блок памяти. Датчики измеряют значение температуры с точностью 0,125 градуса в диапазоне от 34,125 до 42 градусов. Показания термометров записываются ежеминутно, значение температуры кодируется минимальным возможным количеством битов, достаточным, чтобы сохранить все возможные значения. Определите объем суточного файла в байтах. В качестве ответа введите число, без указания единицы измерения.

7. В частной школе «Слюнявчик» детям редко ставят плохие оценки: половина всех оценок составляют пятерки; четверок – вдвое меньше, чем пятерок; троек и двоек примерно поровну. Разрабатывается сервис, позволяющий родителю получить все оценки ученика (только баллы, без указания предметов). Оценки передаются в виде массива битов, никак не отделяются друг от друга – просто длинная цепочка ноликов и единиц. Учителя предложили несколько способов кодирования.

Учитель информатики Вера Петровна Хартли: 2 – 010,  
3 – 011, 4 – 100, 5 – 101

Учитель физики Егор Егорович Унарный: 2 – 11,  
3 – 111, 4 – 1111, 5 – 11111

Учитель литературы Муза Аполлоновна Богемская:  
2 – 0000, 3 – 000, 4 – 00, 5 – 0

Учитель математики Соломон Соломонович Шеннон:  
2 – 000, 3 – 001, 4 – 01, 5 – 1

Учитель физкультуры Андрей Николаевич Ок: 2 – 01,  
3 – 10, 4 – 0, 5 – 1

Кто из учителей предложил способ, который, во-первых, позволяет однозначно декодировать любую переданную последовательность оценок и, во-вторых, гарантирует, что суммарный объем сообщений с оценками всех учеников будет минимальным?

8. Известно, что истинны следующие высказывания:

1. Зеленые ежики мерещатся только наркоманам
2. В танкисты берут только тех, кто маленького роста
3. Наркоманов не берут в армию
4. Кто плохо кушает – тот маленький
5. У всех наркоманов плохой аппетит

Какие из приведенных ниже утверждений наверняка истинны?

- a. Не бывает танкистов с хорошим аппетитом
- b. Танкистам не мерещатся зеленые ежики

- с. Наркоманам не мерещатся красные чижики
- d. Зеленые ежики мерещатся только тем, у кого плохой аппетит
- е. Танкистов не существует

9. На одном швейцарском курорте продвигают новый вид отдыха – гастротуризм. На фуникулере туристы утром поднимаются на вершину, к ресторану «Старт» (светлый кружок на схеме на рисунке 4). После завтрака они садятся на велосипеды и отправляются в путь по системе дорожек, спускаясь от ресторана к ресторану. Почему именно спускаясь? Потому что на сытый желудок педали крутить вредно, а все дорожки идут

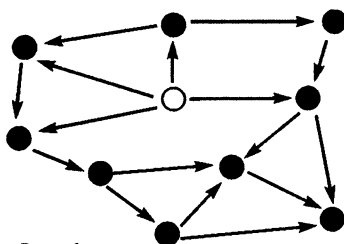


Рис. 4

под уклон. Кроме того, у гастровелосипедов педалей и нет – только руль и тормоз. Заканчивается маршрут в ресторане «Финиш» (правый нижний кружок). За день турист совершает один спуск от «Старта» до «Финиша». Русский турист Жора решил совершить спуск всеми возможными способами. Сколько дней ему придется провести на курорте? Ответ введите числом.

10. Делфтский яблокоед, вот уже третью Политехническую олимпиаду обитающий в бесконечных одномерных стеллажах, закончил дистанционный курс «Олимпиадная информатика» и понял, что он – машина Тьюринга. Он бывает в трех состояниях – Г (голодный), П (полуголодный) и С (сытый). Каждое утро, проснувшись, он анализирует свое состояние и количество яблок на полке стеллажа. При каждом сочетании состояния/количество он съедает некоторое количество яблок с полки (количество оставшихся, естественно, меняется), переходит в одно из состояний (может остаться в том же) и выполняет одно из действий: + (ползет на 1 полку вверх), – (ползет на 1 полку вниз) или = (остается на месте). Вот полный набор правил поведения Яблокоеда (табл. 3):

Таблица 3

| Кол-во яблок  | 0       | 1       | 2       | 3       |
|---------------|---------|---------|---------|---------|
| Голодный (Г)  | Г, 0, + | П, 0, + | С, 0, + | С, 1, = |
| Полусытый (П) | Г, 0, – | С, 0, = | С, 1, = | С, 2, – |
| Сытый (С)     | П, 0, + | П, 0, – | С, 1, + | С, 2, + |

В каждой ячейке 1 – состояние, в которое переходит яблокоед, 2 – количество яблок, остающихся в текущей ячейке, 3 – направление перехода.

В понедельник утром голодный и злой яблокоед находится на полке с номером 0. Количество яблок на полках приведено в таблице 4 (все остальные полки пусты). Где и в каком состоянии будет яблокоед утром следующего понедельника?

Таблица 4

| № полки         | 4 | 3 | 2 | 1 | 0 | -1 | -2 | -3 | -4 |
|-----------------|---|---|---|---|---|----|----|----|----|
| Кол-во<br>яблок | 1 | 2 | 0 | 1 | 3 | 1  | 2  | 1  | 3  |

### Заключительный тур

**1 (15 баллов).** В стране Ыюа – 3 языка. Алфавит каждого из языков включает все те символы, которые входят в название страны. В каждом языке 64 слова, но слова совершенно разные. В таблице 5 приведено количество слов каждого языка, начинающихся на каждую букву алфавита. Сколько бит информации несет сообщение о том, на какую из букв алфавита начинается задуманное слово, в том языке, в котором это сообщение наиболее информативно?

Таблица 5

|         | Ы  | О  | У  | А  |
|---------|----|----|----|----|
| Язык Ыю | 32 | 16 | 8  | 8  |
| Язык Уа | 16 | 16 | 16 | 16 |
| Язык Аы | 0  | 0  | 0  | 64 |

**2 (20 баллов).** Делфтский яблокоед – традиционный персонаж Политехнической олимпиады, обитающий в стеллажах-массивах на заочном туре в одномерных, на очном в двумерных. Яблокоед, обитающий в Политехе, самец. Чтобы он по весне не скучал, к нему в гости привезли самочку-яблокоедиху. Ниже для экономии места будем обозначать яблокоедов Он и Она.

Романтическая встреча должна состояться в квадратном двумерном стеллаже размером  $N$  на  $N$  ячеек ( $N > 2$ ). В момент времени 0 Он находится в левом нижнем углу стеллажа (ячейка с координатами  $(1, 1)$ ), а Она – в правом верхнем (ячейка с координатами  $(N, N)$ ). С этого момента яблокоеды начинают двигаться в соответствии с природными инстинктами. Ежесекундно Он и Она перемещаются из текущей ячейки в соседнюю. При

Таблица 6

|  |  |
|--|--|
| <b><u>Алг</u></b> АЛГ  |  |
| <b><u>Нач</u></b>  |  |
| <b><u>Цел</u></b> A[100], K, L   |  |
| A[1] := 1  |  |
| <b><u>Для</u></b> K <b><u>От</u></b> 2 <b><u>До</u></b> 100 <b><u>НЦ</u></b> |  |
| A[K] := S(K)   |  |
| <b><u>Для</u></b> L <b><u>От</u></b> 1 <b><u>До</u></b> K-1 <b><u>НЦ</u></b> |  |
| <b><u>Если</u></b> A[L] + A[K-L]>A[K] <b><u>То</u></b>                       |  |
| A[K] := A[L]+ A[K-L]   |  |
| <b><u>Всё</u></b>  |  |
| <b><u>КЦ</u></b>   |  |
| <b><u>КЦ</u></b>   |  |
| <b><u>Кон</u></b>  |  |
|  |  |
| <b><u>Алг</u></b> <b><u>Цел</u></b> S ( <b><u>Цел</u></b> N)                 |  |
| <b><u>Цел</u></b> T  |  |
| S := 0   |  |
| <b><u>Для</u></b> T <b><u>От</u></b> 1 <b><u>До</u></b> N                    |  |
| <b><u>Если</u></b> N mod T=0 <b><u>То</u></b>                                |  |
| S := S + T   |  |
| <b><u>Всё</u></b>  |  |
| <b><u>КЦ</u></b>   |  |
| <b><u>Кон</u></b>  |  |

этом Она все время движется по часовой стрелке вдоль внешней стены шкафа: сначала вниз до упора, потом влево, далее вверх, вправо и на следующий круг. А Он действует иначе: «сканирует» стеллаж, прочесывает его сначала по вертикали, потом по горизонтали. Он ползет вверх, пока не достигнет верхней границы шкафа, смещается на ячейку вправо, затем вниз до дна шкафа, опять вправо и т.д. Когда Он упирается в угол, он переходит от вертикального прочесывания к горизонтальному и наоборот. На какой секунде произойдет встреча яблокоедов? В качестве ответа введите формулу.

**3 (20 баллов).** Имеется алгоритм, описанный в виде псевдокода (табл. 6). Чему после его выполнения будет равняться  $a[11]$ ?

**4 (20 баллов).** Майору Пронину удалось сфотографировать фрагмент электронной таблицы, с помощью которой вражеский агент Корявый зашифровывал сообщения (табл. 7). Пронин заметил, что столбец С заполнен двумя экземплярами русского алфавита, в черную ячейку вписывается число, в серые последо-

тельно вписываются буквы сообщения. Затем формула из E1 тиражируется вниз автозаполнением и из столбца E переписывается текст шифровки. Вот перехваченный текст шифровки,

Таблица 7

|   |      |   |   |   |  |   |   |   |   |   |   |
|---|------|---|---|---|--|---|---|---|---|---|---|
| E1 ▾  f <sub>ж</sub> =ИНДЕКС(\$C\$1:\$C\$66;ПОИСКПОЗ(D1;\$C\$1:\$C\$33)+ОСТАТ(СТРОКА(D1);\$A\$2)) |      |   |   |   |  |   |   |   |   |   |   |
|   | A    | B | C | D |  | F | G | H | I | J | K |
|   | Ключ |   | А |   |  |   |   |   |   |   |   |
| 2   |      |   | Б |   |  |   |   |   |   |   |   |
|   |      |   |   |   |  |   |   |   |   |   |   |

указывающей на место встречи вражеских агентов:

### 3 – ШМАМРВТМАА

На какой станции метро состоится встреча?

**5 (10 баллов).** Имеется 6 высказываний о задуманном натуральном числе из интервала от 1 до 32:

A={Задуманное число нечетно}

B={В задуманном числе есть цифра 1}

C={Задуманное число – двузначное}

D={Задуманное число начинается с цифры 3}

E={В задуманном числе нет цифры 7}

F={Задуманное число – простое}

Составьте из этих высказываний логическое выражение, несущее ровно 2 бита информации о задуманном числе. В выражении можно использовать любые из имеющихся высказываний в любом количестве, операции И, ИЛИ, НЕ и скобки.

**6 (15 баллов).** Имеется программа на языке программирования Small Basic:

```
Turtle .Show ()  
For k=1 To n  
    Turtle. move (120)  
    Turtle .Angle =Turtle .Angle+x  
EndFor
```

Она манипулирует исполнителем Черепашкой. По команде Move Черепашка ползет в направлении, заданном текущим значением азимута в градусах – свойством Angle, – на указанное в скобках расстояние в пикселах. В начальный момент Черепашка находится в центре графического окна и намеревается ползти вверх (Angle=0). Какие значения нужно до выполнения этого фрагмента программы присвоить целочисленным переменным n и x, чтобы в результате получилось изображение, представленное на рисунке?

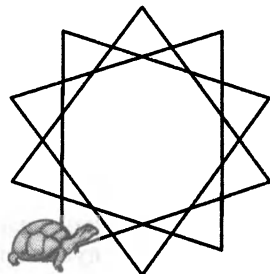


Рис. 5

*Публикацию подготовили Т.Андреева, А.Басов, М.Коробков,  
Е.Крылова, А.Моисеев, С.Преображенский, В.Родионов,  
С.Старовойтов, А.Щукин*

## ЕДИНЫЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ЭКЗАМЕН ПО ФИЗИКЕ

Вариант 1

### Ответы

|           |           |           |           |           |           |           |           |           |            |            |            |            |            |            |
|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|
| <b>A1</b> | <b>A2</b> | <b>A3</b> | <b>A4</b> | <b>A5</b> | <b>A6</b> | <b>A7</b> | <b>A8</b> | <b>A9</b> | <b>A10</b> | <b>A11</b> | <b>A12</b> | <b>A13</b> | <b>A14</b> | <b>A15</b> |
| 1         | 4         | 3         | 2         | 3         | 3         | 2         | 4         | 1         | 2          | 1          | 4          | 2          | 2          | 3          |

|            |            |            |            |            |            |            |            |            |            |
|------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|
| <b>A16</b> | <b>A17</b> | <b>A18</b> | <b>A19</b> | <b>A20</b> | <b>A21</b> | <b>A22</b> | <b>A23</b> | <b>A24</b> | <b>A25</b> |
| 1          | 4          | 1          | 3          | 2          | 4          | 4          | 1          | 3          | 1          |

|           |           |           |           |
|-----------|-----------|-----------|-----------|
| <b>B1</b> | <b>B2</b> | <b>B3</b> | <b>B4</b> |
| 131       | 221       | 12        | 21        |

### Указания и решения

**A22.** Можно последовательно найти: 1) время подъема до верхней точки  $t_1 = v_1/g = 1$  с и высоту подъема  $h_1 = v_0^2/(2g) = 5$  м; 2) время падения от верхней точки  $t_2 = t - t_1 = 2$  с; 3) пройденное при падении расстояние  $h_1 = gt_2^2/2 = 20$  м; 4) начальную высоту  $h_0 = h_2 - h_1 = 15$  м. А можно, выбрав начало координат на уровне земли, записать условие, что в момент падения координата обращается в ноль:

$$0 = h_0 + v_0 t - \frac{gt^2}{2}$$

и сразу найти  $h_0$ .

**A23. Указание.** Когда объем уменьшится вдвое, пар станет насыщенным, после чего его плотность меняться не будет.

**C1.** Яркость вспышки при разрядке конденсатора через лампочку можно связать с выделившейся при разрядке энергией, определенную часть от которой представляет собой энергия светового излучения. Кроме того, яркость вспышки зависит от температуры, до которой успеет нагреться лампочка, а температура зависит от выделившейся энергии. Поскольку начальные напряжения на конденсаторах одинаковы ( $U_1 = U_2 = \mathcal{E}$ ), а емкость

$$C = \frac{\epsilon_0 S}{d}$$

в первом случае больше ( $d_1 < d_2$ ), то энергия конденсатора

$$W = \frac{CU^2}{2}$$

в первом случае будет больше, и лампочка вспыхнет ярче.

**С2.** Поскольку трение при движении по горке отсутствует, то механическая энергия сохраняется:

$$mgH = \frac{mv_0^2}{2}.$$

Дальность полета выражается кинематической формулой

$$s = v_x t = v_0 \cos \alpha \cdot \frac{2v_0 \sin \alpha}{g} = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}$$

(формула может быть приведена без вывода). Исключая  $v_0$ , получаем

$$s = 2H \sin 2\alpha = H\sqrt{3}.$$

**С3.** Цикл тепловой машины изображен на рисунке 1. На участке 3–1 теплообмен отсутствует. Тепло от нагревателя газ получает в изотермическом процессе 1–2, где изменение внутренней энергии равно нулю:

$$Q_1 = A,$$

а отдает тепло холодильнику в изохорном процессе 2–3, где равна нулю работа:

$$Q_2 = \Delta U = \frac{3}{2} \nu R |\Delta T|.$$

Получаем

$$\eta = 1 - \frac{Q_2}{Q_1} = 1 - \frac{3 \nu R |\Delta T|}{2 A}.$$

**С4.** Вся энергия, выделившаяся в проводнике, идет на его нагревание:

$$\frac{U^2}{R} t = cm \Delta T.$$

Подставляя  $R = \rho_{\text{эл}} l / S$  и  $m = \rho (lS)$ , получим

$$U = \sqrt{\frac{c \rho_{\text{эл}} \rho l^2 \Delta T}{t}} \approx 2 \text{ В}.$$

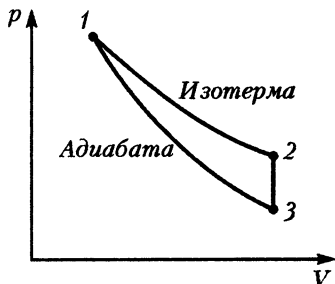


Рис. 1



**С5.** Для поддержания постоянной скорости рамки к ней надо прикладывать силу, равную силе Ампера. Сила Ампера отлична от нуля лишь в те интервалы времени, когда в магнитном поле находится либо только передняя, либо только задняя сторона рамки. ЭДС индукции возникает только в одной этой стороне и равна

$$\mathcal{E} = Bvb,$$

по рамке протекает ток (направленный от нас)

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R},$$

и на эту сторону действует сила Ампера, направленная (в соответствии с правилом Ленца) назад и равная

$$F = IBb = \frac{B^2 b^2 v}{R}.$$

Полная работа на двух участках равна

$$A = 2Fb = \frac{2B^2 b^3 v}{R}.$$

Отсюда находим сопротивление рамки:

$$R = \frac{2B^2 b^3 v}{A} = 0,1 \text{ Ом}.$$

**С6.** Число фотонов равно

$$N = \frac{E}{E_{\text{ф}}} = \frac{Pt}{hc/\lambda} = 6 \cdot 10^{15}.$$

*Вариант 2*

**Ответы**

|           |           |           |           |           |           |           |           |           |            |            |            |            |            |            |
|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|
| <b>A1</b> | <b>A2</b> | <b>A3</b> | <b>A4</b> | <b>A5</b> | <b>A6</b> | <b>A7</b> | <b>A8</b> | <b>A9</b> | <b>A10</b> | <b>A11</b> | <b>A12</b> | <b>A13</b> | <b>A14</b> | <b>A15</b> |
| 4         | 2         | 4         | 4         | 3         | 1         | 3         | 2         | 1         | 2          | 4          | 3          | 1          | 2          | 1          |

|            |            |            |            |            |            |            |            |            |            |
|------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|
| <b>A16</b> | <b>A17</b> | <b>A18</b> | <b>A19</b> | <b>A20</b> | <b>A21</b> | <b>A22</b> | <b>A23</b> | <b>A24</b> | <b>A25</b> |
| 2          | 3          | 3          | 1          | 3          | 3          | 4          | 4          | 2          | 1          |

|           |           |           |           |
|-----------|-----------|-----------|-----------|
| <b>B1</b> | <b>B2</b> | <b>B3</b> | <b>B4</b> |
| 321       | 113       | 42        | 43        |

**Указания и решения**

**A14. Указание.** При равномерном вращении кольца в магнитном поле с угловой скоростью  $\omega$  магнитный поток меняется по

закону  $\Phi = BS \cos \omega t$ , а ЭДС индукции равна

$$\mathcal{E}(t) = -\Phi'(t) = \omega BS \sin \omega t.$$

Максимальная ЭДС и максимальный ток ( $I = \mathcal{E}/R$ ) пропорциональны  $\omega$ .

**A19. Указание.** Число ядер свинца (продуктов распада) равно числу распавшихся ядер таллия:

$$N = N_0 - N_0 \cdot 2^{-t/T},$$

где  $T$  – период полураспада.

**A21.** Когда ток перестал меняться, ЭДС индукции обратилась в ноль. Тогда  $I = \mathcal{E}/R$ , откуда  $\mathcal{E} = IR = 12$  В. В момент  $t_1 = 1$  с ЭДС индукции равна  $\mathcal{E} - I_1 R = 4,4$  В.

**A22. Указание.** Из условия равновесия, записанного в проекции на ось  $y$ , находим вертикальную составляющую силы реакции в точке  $C$ , из теоремы Пифагора – горизонтальную составляющую этой силы, из условия равновесия по оси  $x$  находим горизонтальную составляющую в точке  $B$ .

**A23. Указание.** На плавление льда пошло количество теплоты

$$Q_{\text{пл}} = Q_1 \frac{\lambda m}{\lambda m + c_{\text{в}} m \Delta t} = Q_1 \frac{1}{1 + c_{\text{в}} \Delta t / \lambda} = 80 \text{ кДж}.$$

Поскольку  $Q_2 < Q_{\text{пл}}$ , то не весь лед растает. (Если  $Q_2 > Q_{\text{пл}}$ , то  $Q_2 - Q_{\text{пл}}$  пойдет на нагревание воды.)

**C1.** При падении света на черную пластинку свет поглощается, конечный импульс равен нулю, пластинке за 1 с передается импульс, равный импульсу падающего света

$$\Delta p_1 = \frac{E_{\text{пад}}}{c}$$

(изменение импульса за 1 с равно силе давления света). В случае зеркала большая часть света отражается назад, и переданный пластинке за 1 с импульс равен

$$\Delta p_2 = p_{\text{пад}} + p_{\text{отр}} = \frac{E_{\text{пад}} + E_{\text{отр}}}{c}.$$

Сила давления во втором случае почти в два раза (в случае идеального зеркала – ровно в два) больше, чем в первом.

**C2.** Из формулы кинематики

$$L = (v \cos \alpha) \cdot \frac{2(v_0 \sin \alpha)}{g} = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}$$

находим  $v_0^2 = gL/\sin 2\alpha$  и подставляем в закон сохранения

энергии

$$E_{\text{упр}} = mgb \sin \alpha + \frac{mv_0^2}{2}.$$

Находим

$$b = \frac{1}{mg \sin \alpha} \left( E_{\text{упр}} - \frac{mgL}{2 \sin 2\alpha} \right) \approx 0,5 \text{ м}.$$

**С3.** Так как на участках 2–3 и 4–1 теплообмен отсутствует, то получает тепло газ только в изобарном процессе 1–2 ( $Q_1 = Q_{12}$ ), а отдает только в изохорном процессе 3–4 ( $Q_2 = |Q_{34}|$ ). Поскольку в изохорном процессе работа равна нулю, то

$$|Q_{34}| = |\Delta U_{34}| = \frac{3}{2} \nu R |T_4 - T_3| = \frac{3}{2} \nu R (t_{\text{max}} - t_{\text{min}}) \approx 3,3 \text{ кДж}.$$

КПД цикла равен

$$\eta = 1 - \frac{Q_2}{Q_1},$$

откуда находим

$$Q_1 = \frac{Q_2}{1 - \eta} \approx 3,9 \text{ кДж}.$$

**С4.** После перегорания резистора  $R_2$  внешнее сопротивление цепи равно

$$R_{\text{внеш}} = R_1 + \frac{R_3 R_4}{R_3 + R_4} = 1,5R = 30 \text{ Ом},$$

ток в цепи, протекающий как раз через резистор  $R_1$ , равен

$$I = \frac{\mathcal{E}}{r + R_{\text{внеш}}} = 3,44 \text{ А}.$$

Получаем

$$P_1 = I^2 R_1 = 236 \text{ Вт}.$$

**С5.** На первом временном интервале в рамке возникает ЭДС индукции

$$\mathcal{E}_1 = \frac{|\Delta \Phi_1|}{\Delta t_1} = S \frac{|\Delta B_1|}{\Delta t_1},$$

по рамке протекает ток

$$I_1 = \frac{\mathcal{E}_1}{R}$$

и выделяется количество теплоты

$$Q_1 = I_1^2 R \Delta t_1 = \frac{\mathcal{E}_1^2}{R} \Delta t_1 = \frac{S^2 \Delta B_1^2}{R \Delta t_1}.$$

Из формулы для полного количества теплоты

$$Q = \frac{S^2 \Delta B_1^2}{R \Delta t_1} = \frac{S^2 \Delta B_2^2}{R \Delta t_2}$$

выражаем сопротивление рамки:

$$R = \frac{S^2}{Q} \left( \frac{\Delta B_1^2}{\Delta t_1} + \frac{\Delta B_2^2}{\Delta t_2} \right) = \frac{I^4}{Q} \left( \frac{\Delta B_1^2}{\Delta t_1} + \frac{\Delta B_2^2}{\Delta t_2} \right) = 0,3 \text{ Ом}.$$

**С6.** Выразим нужную нам разность энергий через известные разности и получим

$$\begin{aligned} \nu_{24} &= \frac{E_4 - E_2}{h} = \frac{E_4 - E_1}{h} - \frac{E_3 - E_1}{h} + \frac{E_3 - E_2}{h} = \\ &= \frac{c}{\lambda_{41}} - \nu_{31} + \nu_{32} = 4,3 \cdot 10^{14} \text{ Гц}. \end{aligned}$$

Вариант 3

Ответы

|   |   |   |   |     |    |    |   |   |     |    |    |    |    |
|---|---|---|---|-----|----|----|---|---|-----|----|----|----|----|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5   | 6  | 7  | 8 | 9 | 10  | 11 | 12 | 13 | 14 |
| 3 | 4 | 3 | 4 | 0,6 | 23 | 14 | 3 | 3 | 1,5 | 13 | 42 | 3  | 1  |

|    |    |    |    |    |    |    |    |    |           |     |     |
|----|----|----|----|----|----|----|----|----|-----------|-----|-----|
| 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | 21 | 22 | 23 | 24        | 25  | 26  |
| 3  | 4  | 32 | 21 | 3  | 1  | 43 | 22 | 1  | 35 или 53 | 550 | 270 |

27

1000

Указания и решения

**24.** Сразу после замыкания ключа напряжение на конденсаторе равно нулю, напряжение на резисторе равно ЭДС, поэтому  $I_0 = \mathcal{E}/R$ . Отсюда находим  $\mathcal{E} = I_0 R = 6 \text{ В}$ . В момент времени  $t = 3 \text{ с}$  напряжение на резисторе равно  $IR = 0,3 \text{ В}$ , а напряжение на конденсаторе равно  $\mathcal{E} - IR = 5,7 \text{ В}$ .

**25.** Поскольку растаяла только часть льда, конечная температура равна  $0^\circ \text{C}$ . Уравнение теплового баланса имеет вид

$$\lambda m_{\text{л}} + c m_{\text{в}} (0 - t_{\text{в}}) = 0,$$

откуда находим

$$m_{\text{в}} = m_{\text{л}} \frac{\lambda}{c_{\text{в}} t_{\text{в}}} = 550 \text{ г}.$$

**27.** Поскольку частица движется равномерно по окружности, сила равна

$$F = \frac{mv^2}{R}.$$

Кинетическая энергия частицы равна

$$W_k = \frac{mv^2}{2} = \frac{FR}{2} = 1,6 \cdot 10^{-16} \text{ Дж} = 1000 \text{ эВ}.$$

28. На шайбу действуют силы тяжести  $m\vec{g}$  и нормальной реакции  $\vec{N}$  (рис.2). Ускорение  $\vec{a}$  направлено вдоль равнодействующей этих сил, т.е.

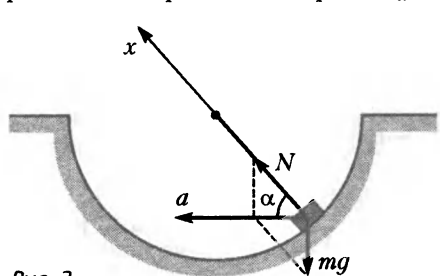


Рис. 2

внутрь образованного ими тупого угла. Кроме того, проекция вектора ускорения на ось  $x$ , проведенную от шайбы к центру окружности (вдоль  $\vec{N}$ ), равна центростремительному (нормальному) ускорению, т.е. положительна. Следовательно,

вектор ускорения составляет острый угол  $\alpha$  с вектором  $\vec{N}$  (направлен внутрь траектории).

29. Поскольку тело плавает, сила Архимеда равна силе тяжести:

$$\rho_1 \frac{V}{4} g + \rho_2 \frac{3V}{4} g = \rho V g.$$

Получаем

$$\rho = \frac{1}{4} \rho_1 + \frac{3}{4} (2\rho_1) = \frac{7}{4} \rho_1 = 700 \text{ г/м}^3.$$

30. При движении пробки вниз сила трения направлена вверх, поэтому перед остановкой пробки условие ее равновесия имеет вид

$$p_1 S + F_{\text{тр}} = p_0 S.$$

При движении пробки вверх сила трения направлена вниз, поэтому

$$p_2 S - F_{\text{тр}} = p_0 S.$$

Исключая из последних двух уравнений силу трения, получим

$$p_1 + p_2 = 2p_0.$$

Поскольку масса газа в сосуде не меняется, параметры газа в различных состояниях связаны соотношениями

$$\frac{p_0(SL)}{T_0} = \frac{p_1(Sh)}{T_1} \text{ и } \frac{p_0(SL)}{T_0} = \frac{p_2(SH)}{T_0}.$$

Выражая отсюда  $p_1$  и  $p_2$  через  $p_0$  и подставляя в предыдущее уравнение, получим

$$\frac{T_1}{T_0} \frac{L}{h} + \frac{L}{H} = 2,$$

откуда

$$T_1 = T_0 \left( \frac{2h}{L} - \frac{h}{H} \right) \approx 219 \text{ К}.$$

**31.** При движении перемычки вправо на свободные заряды действует сила Лоренца, которая вызывает индукционный ток в указанном стрелкой направлении (рис. 3). На ток в перемычке действует сила Ампера, направление которой определяется правилом левой руки и оказывается противоположным направлению движения перемычки (в полном соответствии с правилом Ленца). При движении перемычки с установившейся скоростью ее ускорение равно нулю:

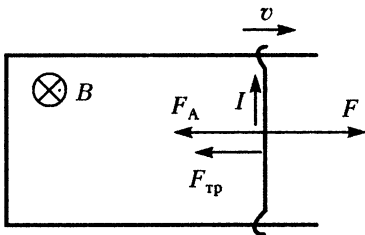


Рис. 3

$$F - F_A - F_{\text{тр}} = 0,$$

где  $F_{\text{тр}} = \mu N = \mu mg$ ,  $F_A = IBl$ . Силу тока найдем из закона Ома для полной цепи:

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R},$$

а ЭДС индукции в движущемся проводнике определяется выражением

$$\mathcal{E} = Bvl.$$

Получаем уравнение

$$F - \frac{B^2 l^2 v}{R} - \mu mg = 0,$$

откуда находим

$$v = \frac{(F - \mu mg) R}{B^2 l^2} = 4 \text{ м/с}.$$

**32.** Начальное количество атомов полония определяется формулой

$$N_0 = \frac{m_{\text{п}}}{M_{\text{п}}} N_A.$$

Количество атомов гелия в сосуде через время  $t$  определяется числом распавшихся атомов полония:

$$N_{\Gamma} = N_0 - N_0 \cdot 2^{-t/T_n}$$

(отметим, что  $t/T_n = 1/4$ , а  $2^{-1/4} = 1/\sqrt[4]{2} = 0,84$  может быть вычислено на простом калькуляторе). Парциальное давление гелия

$$p_{\Gamma} = p - p_0$$

связано с числом атомов уравнением состояния:

$$p_{\Gamma} = \frac{N_{\Gamma}}{V} kT.$$

Выражая из этих уравнений объем сосуда, получим

$$V = \frac{m_n N_A}{M_n} \frac{(1 - 2^{-t/T_n}) kT}{p - p_0} = \frac{m_n}{M_n} \frac{(1 - 2^{-t/T_n}) RT}{p - p_0} = 75 \text{ см}^3$$

(здесь  $M_n = 209$  г/моль – молярная масса полония).

## МЕЖРЕГИОНАЛЬНАЯ ОЛИМПИАДА «ВЫСШАЯ ПРОБА»

### МАТЕМАТИКА

#### Отборочный этап

7 класс

1. 10.

В самом деле,  $9 + \underbrace{99 + 99 + \dots + 99}_{10 \text{ раз}} = 999$ .

2. 32.

У Милы было не больше чем  $33/2 = 16,5$  пакетиков. У Тани было не меньше чем  $47/3 = 15\frac{2}{3}$  пакетиков. Значит, у них обеих было по 16 пакетиков, а всего 32 пакетика.

3. 6.

Воскресеньями были 2-е, 9-е, 16-е, 23-е и 30-е числа месяца. 15-е число было субботой.

4. 60.

Пусть вначале было  $N$  монет. Число  $N$  должно делиться на каждое из чисел 2, 3, 4, 5, 6, 7. Зайцу досталось  $N/7$  монет. Это число меньше 100 и делится на 2, 3, 4, 5, 6, т.е.  $N/7 = 60$ .

5. 45.

У каждого оказалось 8 ведер, причем суммарное количество воды у каждого составляло 3,5 ведра. Значит, 5 полных ведер с

водой могли распределиться одним из двух способов:  $3 + 2 + 0$  или  $2 + 2 + 1$ . Далее следует распределить полупустые ведра и посмотреть, в каком случае  $abc$  получается больше.

6. 110.

Точки расположены в 11 вертикальных и 11 горизонтальных рядах. В каждом ряду 10 отрезков, соединяющих соседние точки.

7. 22,5.

Вершиной прямого угла является точка  $B$  или точка  $C$ . Если  $B$  – вершина прямого угла, то  $BA = BD$ ,  $DA = DC$ .

8.  $72 = 4 \cdot (12 + 18 : 6 + 4)$ .

9. 333.

Девять чисел вида  $\overline{xxx}$  и по 9-9 чисел каждого из видов  $\overline{axxx}$ ,  $\overline{xaxx}$ ,  $\overline{xhax}$ ,  $\overline{xxxa}$ .

10. 7.

Если занумеровать богатырей от 1 до 7, то график дежурств на 7 дней: (1, 2, 3), (1, 4, 5), (1, 6, 7), (2, 4, 6), (2, 5, 7), (3, 4, 7), (3, 5, 6).

8 класс

1. 280.

Пусть изначально было  $N$  монет. Число  $N$  должно делиться на каждое из чисел 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Зайцу досталось  $N/9$  монет. Это число делится на 2, 4, 5, 7, 8, а значит, делится на 280.

2. 56.

У Милы было не более  $57/2 = 28,5$  пакетиков чая. У Тани было не менее  $83/3 = 27\frac{2}{3}$  пакетиков. Значит, у них обеих было по 28 пакетиков, а всего в коробке 56.

3. 420.

Точки расположены в 21 горизонтальном и 21 вертикальном ряду. В каждом ряду 20 отрезков, соединяющих соседние точки.

4.  $74 = 4 \cdot (12 + 18 : 6 + 3)$ .

5. См. решение задачи 9 для 7 класса.

6. 4.

Нужно отметить центр шестиугольника и три точки пересечения неглавных диагоналей.

7. 22. Внутри этого отрезка лежат точки  $(13k, 11k)$ ,  $k = 1, 2, 3, \dots, 22$ .

8. 672. Если ладья в углу, то короля можно поставить в одну из 12 клеток. Если ладья на краю, но не в углу – 11 клеток для короля, если ладья не на краю – 10 клеток для короля. В итоге  $4 \cdot 12 + 24 \cdot 11 + 36 \cdot 10$  способов.



9. 5.

Пусть  $O$  — центр окружности. Тогда расстояния от  $O$  до отрезков  $KL$ ,  $MN$ ,  $RS$  равны, поэтому  $O$  также и центр вписанной окружности треугольника  $ABC$ . Радиус вписанной окружности равен  $(12 + 16 - 20)/2 = 4$ , и  $OK = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$ .

10. 20.

Заметим, что  $2^{16k} = 256^{2k} \equiv 1 \pmod{255}$ . Если  $n \geq 3$ , то  $T_n : 16 \Rightarrow T_{n+1} = 2^{T_n} \equiv 1 \pmod{255}$ . Поэтому

$$T_1 + T_2 + \dots + T_{256} = 2 + 4 + 16 + \underbrace{1 + 1 + \dots + 1}_{253 \text{ единицы}} \pmod{255}.$$

9 класс

1. 19.

Всего детей  $25 + 30$ . У 36 из них не все карточки одинаковые. Итого  $25 + 30 - 36 = 19$ .

2. 199.

На третьем шаге получилось число не меньше 10, так как его сумма цифр не совпала с ним самим. На втором шаге получилось число не меньше 19, так как его сумма цифр не меньше 10. Исходное число было не меньше 199, так как его сумма цифр не меньше 19.

3. 401.

Все треугольники (а их всего 401) могут быть равнобедренными. Например, это можно сделать так:  $AP_1 = AB$ ,  $P_1P_2 = P_1B$ ,  $P_2P_3 = P_2B$ , ...,  $P_{400}C = P_{400}B$ .

4. 28.

Если  $a = 4$ , то  $4^2 = 16$  способов выбрать  $b$  и  $c$ . Если  $a = 2$ , то  $3 \cdot 4 = 12$  способов выбрать  $b$  и  $c$ .

5. 141.

Если упаковок первого вида  $x$ , а второго вида —  $y$ , то  $3x + 12y = 12x + 5y$ . Отсюда  $x = 7$ ,  $y = 9$ .

6. 7.

Пусть  $t = x^2$ ,  $t_1$  и  $t_2$  — корни квадратного уравнения после замены, причем  $t_1 < t_2$ . Тогда  $x_1 = -\sqrt{t_2}$ ,  $x_2 = -\sqrt{t_1}$ ,  $x_3 = \sqrt{t_1}$ ,  $x_4 = \sqrt{t_2}$ . Подставляя в условие и пользуясь теоремой Виета ( $t_1 t_2 = 49$ ), легко получаем ответ.

7. 128.

Если строить путь в обе стороны от самой «узкой» части диаграммы, то получаем  $2^4$  путей вверх и  $2^3$  путей вниз, которые можно любыми способами сочетать. Всего  $2^7$  путей.

8. 7.

Всего диагоналей 14, одна точка может лежать не более чем

на двух диагоналях. Значит, точек не меньше 7. Чтобы 7 точек хватило, нужно ставить их в пересечения диагоналей.

9. 5.

Пусть  $O$  – центр окружности. Тогда расстояния от  $O$  до отрезков  $KL$ ,  $MN$ ,  $RS$  равны, поэтому  $O$  также и центр вписанной окружности треугольника  $ABC$ . Радиус вписанной окружности равен  $(10 + 24 - 26)/2 = 4$ , и  $OK = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$ .

10. 500501.

Наибольшая степень  $x$  будет равна  $1 + 2 + \dots + 1000 = 500500$ . Легко доказать, что все степени до наибольшей будут присутствовать.

10 класс

1. 0,476.

Если после перекрашивания шары одного цвета, значит, до перекрашивания эти же шары были бы разных цветов. Вероятность изначально вытащить разноцветные шары равна  $1 - 0,147 = 0,377$ .

2. 256.

Запишем выражение как  $a^{\frac{7}{8}}$ . Чтобы оно было целым,  $a$  должно быть восьмой степенью натурального числа. Наименьшее такое  $a = 2^8$ .

3. 451.

Все треугольники (а их всего 451) могут быть равнобедренными. Например, это можно сделать так:

$$AP_1 = AB, P_1P_2 = P_1B, P_2P_3 = P_2B, \dots, P_{450}C = P_{450}B.$$

4. 17.

Второй мотоциклист 3 раза обогнал первого, значит, он проехал на 3 круга больше. Таким образом, первый проехал 5 кругов. Второй мотоциклист 20 раз встретился с третьим, значит, в сумме они проехали 20 кругов, т.е. третий проехал 12 кругов. Следовательно, первый и третий встретились  $12 + 5 = 17$  раз.

5. 1300.

Если упаковок первого вида  $x$ , а второго вида –  $y$ , то  $7x + 18y = 17x + 4y$ . Отсюда  $x = 7$ ,  $y = 5$ .

6. 11.

Пусть  $t = x^2$ ,  $t_1$  и  $t_2$  – корни квадратного уравнения после замены, причем  $t_1 < t_2$ . Тогда  $x_1 = -\sqrt{t_2}$ ,  $x_2 = -\sqrt{t_1}$ ,  $x_3 = \sqrt{t_1}$ ,  $x_4 = \sqrt{t_2}$ . Подставляя в условие и пользуясь теоремой Виета ( $t_1t_2 = 121$ ), легко получаем ответ.

7. 19.

Заметим, что  $2^{16k} = 256^{2k} \equiv 1 \pmod{255}$ . Если  $n \geq 3$ , то  $T_n : 16 \Rightarrow T_{n+1} = 2^{T_n} \equiv 1 \pmod{255}$ . Поэтому

$$T_1 + T_2 + \dots + T_{255} = 2 + 4 + 16 + \underbrace{1 + 1 + \dots + 1}_{252 \text{ единицы}} \pmod{255}.$$

8. 1,25.

Пусть  $O$  — центр окружности. Тогда расстояния от  $O$  до отрезков  $KL$ ,  $MN$ ,  $RS$  равны, поэтому  $O$  также и центр вписанной окружности треугольника  $ABC$ . Радиус вписанной окружности равен  $(3 + 4 - 5)/2 = 1$ , и  $OK = \sqrt{1^2 + 0,75^2} = 1,25$ .

9. 2001001.

Наибольшая степень  $x$  равна  $1 + 2 + \dots + 2000 = 2001000$ . Легко показать, что все степени от  $x^0$  до наибольшей будут присутствовать.

10. 4293.

Если Джек Потрошитель рубит деревья в минуту с номером  $k$  и отдыхает в минуту с номером  $k + 1$ , то он срубит меньше деревьев, чем если бы отдыхал в минуту с номером  $k$  и рубил деревья в минуту с номером  $k + 1$ . Следовательно самая выгодная стратегия — вначале отдохнуть  $m$  минут подряд, а затем непрерывно рубить 60 —  $m$  минут. Число срубленных деревьев при этом равно

$$\underbrace{(100 + m) + (100 + m - 1) + (100 + m - 2) + \dots}_{60-m \text{ слагаемых}} = (60 - m)(141 + 3m) : 2$$

(сумма арифметической прогрессии). Максимум этого выражения равен 4293.

11 класс

1. 501.

Все треугольники (а их всего 501) могут быть равнобедренными. Например это можно сделать так:  $AP_1 = AB$ ,  $P_1P_2 = P_1B$ ,  $P_2P_3 = P_2B$ , ...,  $P_{500}C = P_{500}B$ .

2. 0,48.

Если после перекрашивания шары одного цвета, значит, до перекрашивания эти же шары были бы разных цветов. Вероятность изначально вытащить разноцветные шары равна  $1 - 0,115 - 0,405$ .

3. 5450.

Если упаковок первого вида  $x$ , а второго вида —  $y$ , то  $23x + 7y = 9x + 19y$ . Отсюда  $x = 6$ ,  $y = 7$ .

4. 500000000000.

Равенство  $\text{НОК}(16, n) = 16n$  равносильно тому, что  $n$  – нечетное число.

5. 18.

Второй мотоциклист 3 раза обогнал первого, значит он проехал на 3 круга больше. Таким образом, первый проехал 4 круга. Второй мотоциклист 21 раз встретился с третьим, значит, в сумме они проехали 21 круг, т.е. третий проехал 14 кругов. Следовательно, первый и третий встретились  $14 + 4 = 18$  раз.

6. 12,5.

Расстояние  $AB$  будет минимальным, если касательная к параболе в точке  $A$  параллельна прямой  $y = x - 5,25$ , а отрезок  $AB$  перпендикулярен этой прямой.

7. 256.

Если строить путь в обе стороны от самой «узкой» части диаграммы, то получаем  $2^4$  путей вверх и  $2^4$  путей вниз, которые можно любыми способами сочетать. Всего  $2^8$  путей.

8. 6,5.

Пусть  $O$  – центр окружности. Тогда расстояния от  $O$  до отрезков  $KL$ ,  $MN$ ,  $RS$  равны, поэтому  $O$  также и центр вписанной окружности треугольника  $ABC$ . Радиус вписанной окружности равен  $(18 + 24 - 30)/2 = 6$ , и  $OK = \sqrt{6^2 + 2,5^2} = 6,5$ .

9. 2014.

При раскрытии первых 14 скобок получатся все степени от  $x^0$  до  $x^{1+2+\dots+14}$ , т.е. 106 слагаемых. При раскрытии последней скобки по биному Ньютона получится 19 слагаемых. В итоге получим  $106 \cdot 19 = 2014$  слагаемых.

10. 2017.

В пересечении секущей плоскости с основанием пирамиды может получиться три отрезка. Если при этом секущая плоскость пересекается со всеми боковыми гранями, то в сечении получаем многоугольник с  $3 + 2014 = 2017$  сторонами.

*Заключительный этап*

7 класс

1. Например,  $(90 + 9)(10 + 1) = 1089$ . Или:  $(99 + 1)(10 + 9) = 1900$ .

2. Возможное разрезание представлено на рисунке 4.

3. Вначале покажем, как за 2 взвешивания найти самый легкий арбуз из трех.

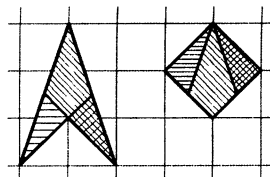


Рис. 4

Пусть веса трех арбузов равны  $a, b, c$ . Взвесим арбузы  $a$  и  $b$ . Если  $a > b$ , то взвесим затем  $b$  и  $c$ . Если  $b > c$ , то  $c$  – самый легкий, если же  $b < c$ , то  $b$  – самый легкий. Если на первом взвешивании было  $a < b$ , то взвешиваем затем  $a$  и  $c$  и рассуждаем аналогично.

Пусть теперь имеются 4 арбуза. Вначале выберем 3 из них, и за два взвешивания найдем самый легкий из этих трех. Затем выкинем его, и еще за два взвешивания найдем самый легкий из оставшихся трех. Выкинем его тоже. Оставшиеся 2 арбуза будут самыми тяжелыми.

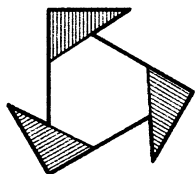


Рис. 5

4. Возможная галерея представлена на рисунке 5.

Действительно, заметим, что для освещения каждого из трех углов в каждой из закрашенных зон должно стоять по источнику света. Однако, так как зоны не пересекаются, для каждой из трех зон должен быть свой источник. Значит, их должно быть хотя бы три.

5. Выиграет второй игрок.

Заметим, что игра должна закончиться в вершине  $A$ . Действительно, степень вершины  $A$  в начале была 4, в конце стала 0, поэтому изменилась на четное число, из чего немедленно вытекает, что мы должны закончить именно в ней.

Докажем, что к концу игры все ребра были пройдены. Действительно, из  $A$  никаких ребер остаться не должно. Степени всех вершин были четны, закончили мы там же, где и начинали, поэтому степени всех вершин остались четны. Ребра  $AB$  нет, поэтому степень вершины  $B$  равна 0, значит, ребра  $BD$  нет, следовательно, степень вершины  $D$  равна 0. Аналогично, равны 0 степени вершин  $E$  и  $F$ . Значит, ребра из  $C$  никуда вести не могут, и ее степень также 0.

Так как всего ребер четное число, закончит игру второй игрок и выигрывает.

6. На пути от  $C$  до  $D$  Вася насчитал в 3 раза больше яблок, чем Петя.

Пусть всего вдоль берега росло  $n$  яблонь. На пути от  $A$  до  $B$  Вася насчитал вдвое меньше яблонь, чем Петя, а вместе они сосчитали все яблони, растущие на берегу. Значит, Вася насчитал  $\frac{n}{3}$ , а Петя –  $\frac{2n}{3}$  яблонь. Аналогично, на пути от  $B$  до  $C$  Вася также насчитал  $\frac{n}{3}$ , и от  $C$  до  $D$  – тоже  $\frac{n}{3}$  яблонь. Значит, всего он насчитал ровно  $\frac{n}{3} + \frac{n}{3} + \frac{n}{3} = n$  яблонь. Таким образом, пройдя

путь от  $A$  до  $D$ , Вася встретил по одному разу все яблони, растущие на берегу.

Далее, пусть всего на яблонях росло  $m$  яблок. На пути от  $A$  до  $B$  Вася насчитал в семь раз меньше яблок, чем Петя, а вместе они насчитали  $m$  яблок. Значит, Вася насчитал  $\frac{m}{8}$ , а Петя —  $\frac{7m}{8}$  яблок. Аналогично, на пути от  $B$  до  $C$  Вася также насчитал  $\frac{m}{8}$  яблок. Но всего на пути от  $A$  до  $D$  Вася насчитал  $m$  яблок (поскольку встретил по одному разу все яблони). Значит, на пути от  $C$  до  $D$  он насчитал  $m - \frac{m}{8} - \frac{m}{8} = \frac{3m}{4}$  яблок. Тогда Петя на пути от  $C$  до  $D$  насчитал  $m - \frac{3m}{4} = \frac{m}{4}$  яблок, т.е. в 3 раза меньше, чем Вася.

8 класс

1. См. решение задачи 1 для 7 класса.

2. Да, может.

Например, выберем три различных простых числа  $p_1$ ,  $p_2$ ,  $p_3$  и рассмотрим числа

$$a = \frac{p_1 p_2}{p_3}, \quad b = \frac{p_1 p_3}{p_2}, \\ c = \frac{p_2 p_3}{p_1},$$

каждое из которых, очевидно, не является целым. Эта тройка удовлетворяет условиям задачи.

3. На рисунках 6 и 7 приведены два способа разрезания. Возможны и другие решения.

4. См. решение задачи 5 для 7 класса.

5. См. решение задачи 6 для 7 класса.

6.  $60^\circ$ .

Заметим, что точка  $O$  лежит на серединном перпендикуляре отрезка  $BC$ . С другой стороны, точка

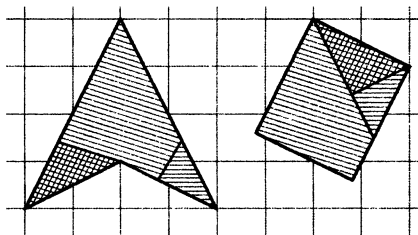


Рис. 6

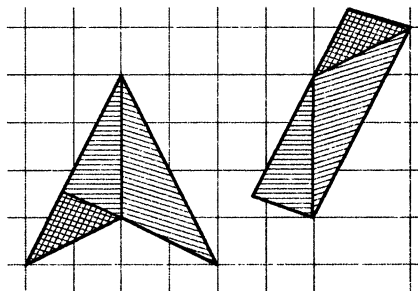


Рис. 7

О лежит на биссектрисе угла  $A$ . Но две эти прямые пересекаются в точке, лежащей на окружности, описанной вокруг треугольника  $ABC$  и делящей дугу  $BC$  пополам. Итак, точка  $O$  лежит на описанной окружности треугольника  $ABC$ .

Углы при вершинах треугольника  $ABC$  мы будем обозначать той же буквой. Рассмотрим равнобедренный треугольник  $OHC$ ,  $OH = OC$ . Тогда из замечания о расположении точки  $O$  и свойств вписанных углов, сразу получаем, что углы при основании этого равнобедренного треугольника равны  $90^\circ - B + A/2$ . Аналогично, угол при основании равнобедренного треугольника  $OHB$  ( $OH = OB$ ) равен  $90^\circ - C + A/2$ . Но сумма этих двух углов равна углу  $BHC$ , который, в свою очередь, равен углу  $180^\circ - A$  (по теореме о вертикальных углах). Следовательно,  $180^\circ - B - C + A = 180^\circ - A$ , или  $3A = 180^\circ$ .

9 класс

1. См. решение задачи 2 для 8 класса.

2.  $75^\circ$ .

Заметим, что точки  $ADFC$  лежат на одной окружности с центром в точке  $B$ . При этом дуга  $FC$  равна  $60^\circ$ . Следовательно, угол  $FAC$  равен  $30^\circ$  (по теореме о вписанном угле). Треугольник  $BDC$  – равнобедренный с прямым углом при вершине  $B$ . Поэтому угол  $DCA$  равен  $\pi/4$ . Тогда острый угол между прямыми  $AF$  и  $DC$  равен  $30^\circ + 45^\circ = 75^\circ$ .

3. См. решение задачи 5 для 7 класса.

4. См. решение задачи 6 для 8 класса.

5. Чтобы не путать с естественной раскраской шахматной доски, выберем в качестве трех цветов красный, синий и серый. Предположим, что поле  $a1$  окрашено в серый цвет. Тогда, при наших правилах раскраски, серыми автоматически оказываются все черные поля доски (напомним, что  $a1$  – черное поле), а на цвет оставшихся тридцати двух (белых) полей имеется единственное ограничение: он должен быть красным или синим. Получаем  $2^{32}$  вариантов раскраски. Если же поле  $a1$  окрашено в красный или синий цвет, то все белые поля шахматной доски автоматически оказываются серыми при любой раскраске по нашим правилам, а цвет любого из оставшихся тридцати двух (черных) полей доски может быть красным или синим. Еще  $2^{32}$  варианта. Итого  $2 \cdot 2^{32} = 2^{33}$ .

6. Пусть  $S_n$  – множество всех чисел  $|a_i - a_j|$ ,  $1 \leq i < j \leq n-1$ ,  $n \geq 3$ . Тогда  $a_n$  есть наименьшее число из множества  $S_n$ . Поскольку  $S_{n-1} \subset S_n$ , то  $a_{n-1} \geq a_n$ , т.е. начиная с  $a_3$  последова-

тельность нестрого убывающая. Следовательно  $a_9 \geq a_{10} = 1$ . Далее из определения последовательности следует

$$a_{10} \leq a_8 - a_9 \mid a_8 - a_9 \Rightarrow a_8 \geq a_9 + a_{10} \geq 2.$$

Аналогично  $a_7 \geq a_8 + a_9 \geq 2 + 1 = 3$ ,  $a_6 \geq a_7 + a_8 \geq 3 + 2 = 5$ , ...  
...,  $a_3 \geq a_4 + a_5 \geq 8 + 13 = 21$ . Это значение достигается, если взять  $a_1 = 55$ ,  $a_2 = 34$ .

10 класс

1. Не могут.

Перенесем все члены первого уравнения в одну часть и разложим получившееся на множители:

$$(x + y)(x - y + 1) = 0.$$

Также сложим все три уравнения:

$$x + y + z = 0.$$

Так как числа  $x$ ,  $y$ ,  $z$  не равны нулю, числа  $x + y$ ,  $y + z$ ,  $z + x$  тоже не равны нулю. Поэтому  $x - y + 1 = 0$ , аналогично  $y - z + 1 = 0$  и  $z - x + 1 = 0$ . Сложив последние три равенства, получаем, что  $3 = 0$ . Противоречие.

2. Если ни одно из чисел  $a$ ,  $b$ ,  $c$  не равно 0, то рассмотрим числа:

$$x = 2bc, y = -ca, z = -ab.$$

Эти числа рациональны и не равны 0, и для них равенство  $ax + by + cz = 0$  выполнено. Домножим их на их общий знаменатель. Они станут целыми, и равенство нулю нужного выражения сохранится.

Если же одно из чисел  $a$ ,  $b$ ,  $c$  равно 0, например  $a = 0$ , то положим  $y = z = 0$ ,  $x = 1$ .

$$3. y = \frac{1}{2}x^2 - \frac{21}{2}x + \frac{97}{2}.$$

Координаты точек  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$  являются решениями системы

$$\begin{cases} y^2 = x, \\ (x - 11)^2 + (y - 1)^2 = 25. \end{cases} \quad (1)$$

Раскрывая скобки во втором уравнении и подставляя  $y^2$  из первого, получаем уравнение-следствие

$$x^2 - 22x + 121 + x - 2y + 1 = 25 \Rightarrow y = \frac{1}{2}x^2 - \frac{21}{2}x + \frac{97}{2}. \quad (2)$$



Любое решение системы (1) является решением уравнения (2). В частности, координаты точек  $A, B, C, D$  являются решениями уравнения (2), т.е. парабола, задаваемая уравнением (2), проходит через точки  $A, B, C, D$ .

4. Продолжим  $EF$  до пересечения со стороной  $BC$  в точке  $M$ , и пусть  $\gamma$  – острый угол между указанными прямыми в точке  $M$ . Тогда проекция отрезка  $EF$  на сторону  $BC$  равна  $|EF| \cos \gamma$  (если  $EF \parallel BC$ , то полагаем  $\gamma = 0$ ). Далее, пусть  $\angle BAO = \alpha$  и  $\angle CAO = \beta$ , а прямая  $AO$  пересекает окружность  $S_{ABC}$ , описанную вокруг  $\triangle ABC$ , в точке  $N$ . Теперь заметим, что  $\angle PCN = \alpha$  и  $\angle PBN = \beta$  (по свойству вписанных углов в окружность  $S_{ABC}$ ). По той же причине  $\angle PEF = \beta$  и  $\angle PFE = \alpha$ .

Опустим перпендикуляр  $FD$  из точки  $F$  на сторону  $BC$ . Тогда  $\angle CFD = \alpha$  по теореме об углах с взаимно-перпендикулярными сторонами, если ее применить к углу  $CFD$  и углу  $DCN$  (напомним, что  $AN$  – диаметр окружности  $S_{ABC}$ !). Если через  $F$  обозначить угол при вершине  $F$  в  $\triangle EAF$ , то из прямоугольного треугольника  $FMD$  сразу получаем, что  $\cos \gamma = \sin(\alpha + F)$ .

Но  $\angle PFA = F + \angle PFE = F + \alpha$ . Рассмотрим, наконец, окружность, описанную вокруг четырехугольника  $AEPF$ . Если ее радиус равен  $r$ , то по теореме синусов  $EF = 2r \sin A$  и  $AD = 2r \sin(F + \alpha)$ . Следовательно,

$$EF \cos \gamma = EF \sin(\alpha + F) = 2r \sin A \sin(F + \alpha) = AP \sin A,$$

что от положения точек  $E$  и  $F$  не зависит.

$$5. 2C_8^2 = 56.$$

Заметим, что при нумерации точек от прямой нас интересуют только ее направление и то, с какой стороны от нее находятся точки. Всю эту информацию можно однозначно восстановить из единичной нормали к ней, направленной к точкам. Поэтому нумерация восьмерки получается из вектора единичной длины. Запараметризуем такие векторы точками окружности.

На время рассмотрим лишь две точки  $A$  и  $B$  из восьмерки. Этим двум точкам можно сопоставить две противоположные точки окружности: две нормали к прямой  $AB$ . Окружность разбилась на две дуги. Ясно, что нумерация  $A$  и  $B$  на одной дуге получается одна и та же, на другой дуге – оставшаяся.

Далее отметим, что нумерацию можно однозначно восстановить по тому, в каком порядке находится каждая отдельно взятая пара. Поэтому, если отметить на окружности все получившиеся  $C_8^2$  пары противоположных точек, на каждой из получившихся

дуг нумерация будет фиксирована. Следовательно, для любой восьмерки точек нумераций будет не больше, чем количество дуг, т.е. не больше, чем  $2C_8^2$ . С другой стороны, мы можем представить себе достаточно общую восьмерку точек, для которой никакие пары противоположных точек не совпадают. Тогда окружность разобьется в точности на  $2C_8^2$  дуг. Наконец, любые две дуги можно будет разделить какой-то парой противоположных точек, значит, на любых двух разных дугах нумерация отличается. Значит,  $2C_8^2$  достижимо.

**6. Первый способ.** Возьмем в качестве чисел  $a_i$  все числа из интервала  $\left(-\frac{p}{2}; \frac{p}{2}\right)$  такие, что  $p \equiv a_i \pmod{3}$ . Докажем, что они удовлетворяют условию задачи. Заметим следующее:

- Все числа  $|a_i|$  принадлежат интервалу  $\left(0; \frac{p}{2}\right)$ .
- Все числа  $|a_i|$  различны. Действительно, если  $a_i = -a_j$  при некоторых  $i, j$ , то  $a_i + a_j = 0 \Rightarrow 2p = 0 \pmod{3}$  – противоречие.
- Любое число из интервала  $\left(0; \frac{p}{2}\right)$ , не делящееся на 3, совпадает с одним из чисел  $|a_i|$ . Действительно, пусть  $t \in \left(0; \frac{p}{2}\right)$ ,  $t \nmid 3$ . Тогда либо  $t \equiv p \pmod{3}$ , либо  $-t \equiv p \pmod{3}$  и, следовательно, одно из чисел  $\pm t$  совпадает с одним из  $a_i$ . Из  $\pm t = a_i$  и  $t > 0$  следует  $t = |a_i|$ .

Итак, множество чисел  $|a_i|$  совпадает с множеством всех чисел из интервала  $\left(0; \frac{p}{2}\right)$ , не делящихся на 3.

Далее, пусть  $3^{\gamma_i}$  – максимальная степень тройки, делящая  $(p - a_i)$ , т.е.  $p - a_i = 3^{\gamma_i} \cdot b_i$ ,  $b_i \nmid 3$ . Из  $p \equiv a_i \pmod{3}$  следует  $\gamma_i > 0$ .

Заметим следующее:

- Все числа  $b_i$  принадлежат интервалу  $\left(0; \frac{p}{2}\right)$ . Действительно,

$$\frac{p}{2} < a_i < \frac{p}{2} \Rightarrow \frac{p}{2} < p - a_i < \frac{3p}{2} \Rightarrow 0 < \frac{p - a_i}{3^{\gamma_i}} < \frac{p}{2}.$$

- Все числа  $b_i$  различны. Действительно, пусть  $b_i = b_j$  при некоторых  $i, j$ . Поскольку  $p - a_i \neq p - a_j$ , отсюда следует  $\gamma_i \neq \gamma_j$ .

Пусть  $\gamma_i > \gamma_j$ . Тогда

$$\frac{p-a_i}{p-a_j} = \frac{3^{\gamma_i} \cdot b_i}{3^{\gamma_j} \cdot b_j} = 3^{\gamma_i - \gamma_j} \geq 3.$$

С другой стороны  $\frac{p}{2} < p-a_j$ ,  $\frac{3p}{2} > p-a_i \Rightarrow \frac{p-a_i}{p-a_j} < 3$  — противоречие.

• Любое число из интервала  $\left(0; \frac{p}{2}\right)$ , не делящееся на 3, совпадает с одним из чисел  $b_i$ . Действительно, пусть  $t \in \left(0; \frac{p}{2}\right)$ ,  $t \not\equiv 0 \pmod 3$ . Тогда существует такое  $\gamma \in \mathbb{N}$ , что

$$t \cdot 3^\gamma \in \left(\frac{p}{2}; \frac{3p}{2}\right) \Rightarrow p-t \cdot 3^\gamma \in \left(-\frac{p}{2}, \frac{p}{2}\right),$$

и при этом  $p-t \cdot 3^\gamma \equiv p \pmod 3$ , следовательно,  $p-t \cdot 3^\gamma = a_i$  при некотором  $i$ . Но тогда  $t \cdot 3^\gamma = p-a_i \Rightarrow t = b_i$ .

Итак, множество чисел  $b_i$  совпадает с множеством всех чисел из интервала  $\left(0; \frac{p}{2}\right)$ , не делящихся на 3 и, следовательно, совпадает с множеством чисел  $|a_i|$ . Отсюда получаем

$$\frac{p-a_1}{|a_1|} \cdot \frac{p-a_2}{|a_2|} \dots \frac{p-a_k}{|a_k|} = \frac{3^{\gamma_1+\dots+\gamma_k} \cdot b_1 \cdot b_2 \cdot \dots \cdot b_k}{|a_1| \cdot \dots \cdot |a_k|} = 3^{\gamma_1+\dots+\gamma_k},$$

что и требовалось.

*Второй способ.* Из условия следует, что  $p$  — число вида  $6n \pm 1$ ,  $6n \pm 2$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . Рассмотрим случай  $p = 6n + 1$ , в остальных случаях вычисления аналогичны. Положим  $a_i = 3n + 1 - 3i$ ,  $i = 1, 2, \dots, 2n$ . Тогда

$$\frac{p}{2} > 3n - 2 = a_1 > a_2 > \dots > a_{2n} = -3n + 1 > -\frac{p}{2}.$$

Вычислим значение выражения:

$$\begin{aligned} \prod_{i=1}^{2n} \frac{p-a_i}{|a_i|} &= \prod_{i=1}^{2n} \frac{6n+1-(3n+1-3i)}{|3n+1-3i|} = 3^{2n} \prod_{i=1}^{2n} \frac{n+i}{|3n+1-3i|} = \\ &= \frac{3^{2n} \cdot \prod_{i=1}^{2n} (n+i)}{\prod_{i=1}^{2n} |3n+1-3i|} = \frac{3^{2n} \cdot (3n)!}{n! \cdot \prod_{i=1}^n (3n+1-3i) \prod_{i=n+1}^{2n} (3i-3n-1)} = \end{aligned}$$

$$= \frac{3^{3n} \cdot (3n)!}{\prod_{i=1}^n (3i) \cdot \prod_{i=1}^n (3i-2) \prod_{i=1}^n (3i-1)} = \frac{3^{3n} \cdot (3n)!}{(3n)!} = 3^{3n}.$$

11 класс

1. См. решение задачи 3 для 10 класса.

2. Может. Пусть  $ABCDEF$  – произвольный правильный шестиугольник. Проведем прямую  $m_A$  через вершину  $A$  и точку  $G$  – середину стороны  $BC$ . Через остальные вершины проведем прямые, параллельные  $m_A$ . Обозначим эти прямые  $m_B, m_C, \dots$ . Опустим перпендикуляры  $DS, CR, BP, CQ$  (рис.8).

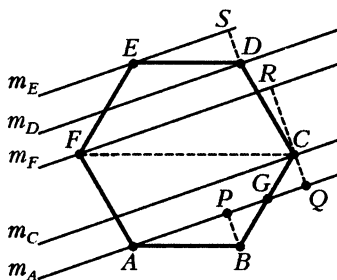


Рис. 8

Будем обозначать  $\rho(x, y)$  расстояние между прямыми  $x$  и  $y$ . Пусть  $\rho(m_A, m_B) = d$ . Тогда

$$BG = CG \Rightarrow BP = CQ \Rightarrow \rho(m_A, m_C) = \rho(m_A, m_B) = d,$$

при симметрии относительно центра шестиугольника прямые  $m_A, m_B, m_C$  переходят соответственно в  $m_D, m_E, m_F$ , откуда  $\rho(m_D, m_E) = \rho(m_D, m_F) = d$ ,

$$\triangle FCR \sim \triangle EDS, FC = 2ED \Rightarrow \rho(m_C, m_F) = CR = 2DS = 2d.$$

Сделаем теперь гомотегию с коэффициентом  $\frac{1}{d}$  (иначе говоря, выберем сторону шестиугольника так, чтобы  $d = 1$ ). Тогда

$$\rho(m_D, m_E) = \rho(m_D, m_F) = \rho(m_A, m_C) = \rho(m_A, m_B) = 1,$$

$$\rho(m_F, m_C) = 2,$$

т.е. все попарные расстояния между прямыми – целые числа.

3. См. решение задачи 6 для 9 класса.

4. а) Пусть  $O$  – центр сферы,  $S$  – площадь поверхности многогранника,  $V$  – его объем. Пронумеруем грани многогранника числами от 1 до  $n$ . Для каждого  $i$  можно образовать пирамиду с вершиной  $O$  и основанием, совпадающим с  $i$ -й гранью многогранника. Обозначим через  $V_i$  объем такой пирамиды, через  $S_i$  – площадь основания,  $h_i$  – высоту, опущенную

из  $O$  на основание. Тогда

$$V \leq \sum_{i=1}^n V_i = \sum_{i=1}^n \frac{1}{3} h_i S_i < \sum_{i=1}^n \frac{1}{3} R S_i = \frac{1}{3} R S.$$

Так как  $V = S$ , получаем, что  $1 < \frac{1}{3} R \Rightarrow R > 3$ .

б) Может. Возьмем прямоугольный параллелепипед  $3000 \times 3000 \times x$ . Он вписан в сферу, очевидно, ее радиус не меньше 1500. Осталось подобрать  $x$  так, чтобы объем был равен площади поверхности. Для этого достаточно, чтобы выполнялось равенство

$$9000000x = 18000000 + 12000x.$$

Очевидно, при каком-то положительном  $x$  оно выполняется.

5. См. решение задачи 6 для 10 класса.

6.  $\pm 1$ .

Рассмотрим клетчатые доски двух видов: обычная доска  $F_n$  размера  $2 \times n$ , и доска  $G_n$  размера  $2 \times n$ , в которой удалена одна угловая клетка. Помимо величин  $A_n$  и  $B_n$  введем величины  $C_n$  и  $D_n$  – количество правильных раскрасок доски  $G_n$  с четным и нечетным количеством раскрашенных клеток.

Клетки будем нумеровать как в шахматах:  $a_i$ ,  $b_i$ , где  $a$ ,  $b$  – буквы, соответствующие рядам,  $i \in \{1, \dots, n\}$  – номера столбцов. Пусть на доске  $F_n$  ( $n \geq 2$ ) правильным способом раскрашено четное количество клеток. Множество таких раскрасок разбивается на три подмножества: 1) клетка  $a_n$  закрашена, 2) клетка  $b_n$  закрашена, 3) ни одна из клеток  $a_n$ ,  $b_n$  не закрашена.

Если закрашена клетка  $a_n$ , то клетки  $a_{n-1}$  и  $b_n$  обязаны быть не закрашенными, а среди остальных правильным образом должны быть закрашены нечетное количество клеток. Значит, количество раскрасок, соответствующих случаю 1) (а так же и случаю 2)), равно  $D_{n-1}$ .

Если ни одна из клеток  $a_n$ ,  $b_n$  не закрашена, то среди остальных правильным образом должны быть закрашены четное количество клеток. Количество таких раскрасок равно  $A_{n-1}$ . В итоге получаем

$$A_n = A_{n-1} + 2D_{n-1}.$$

Аналогичным рассуждением получаем

$$B_n = B_{n-1} + 2C_{n-1},$$

$$C_n = A_{n-1} + D_{n-1},$$

$$D_n = B_{n-1} + C_{n-1}.$$

Обозначим  $P_n = A_n - B_n$ ,  $Q_n = C_n - D_n$ . Тогда, вычитая полученные выше равенства, получаем

$$P_n = P_{n-1} - 2Q_{n-1}, \quad Q_n = P_{n-1} - Q_{n-1}.$$

Вычисляя начальные значения  $P_1 = -1$ ,  $Q_1 = 0$ , находим последовательно

|       |    |    |   |   |    |
|-------|----|----|---|---|----|
| $i$   | 1  | 2  | 3 | 4 | 5  |
| $P_i$ | -1 | -1 | 1 | 1 | -1 |
| $Q_i$ | 0  | -1 | 0 | 1 | 0  |

Далее последовательность становится периодической. Отсюда видно, что искомая величина  $P_n$  принимает только значения  $\pm 1$ .

## ОЛИМПИАДА «ЛОМОНОСОВ-2014»

### МАТЕМАТИКА

#### Отборочный этап

#### 1. 13.

Если куплено  $x$  шариковых ручек,  $y$  — гелевых и  $z$  — перьевых, то имеем два уравнения:  $x + y + z = 20$ ;  $10x + 50y + 80z = 1000$  (или  $x + 5y + 8z = 100$ ). Вычитая из второго уравнения первое, получим  $4y + 7z = 80$ . Отсюда следует, что  $z$  должно делиться на 4, т.е.  $z = 4n$ . Значит,  $4y + 7 \cdot 4n = 80$ , т.е.  $y = 20 - 7n$ . Соответственно  $x = 20 - y - z = 3n$ . Положительные решения получаются при  $n = 1$  и  $n = 2$ . В итоге решением являются две тройки целых чисел: (3, 13, 4) и (6, 6, 8). Наибольшее возможное  $y$  равно 13.

#### 2. -0,2.

Если уравнение имеет корни  $x_1$  и  $x_2$ , то по теореме Виета

$$x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = (3a)^2 - 2a^2 = 7a^2.$$

По условию  $7a^2 = \frac{28}{100}$ , откуда  $a^2 = \frac{1}{25}$  и  $a = \pm \frac{1}{5}$ . Важно при этом, что при  $a = \pm 0,2$  дискриминант  $D = 9a^2 - 4a^2 = 5a^2 > 0$ .

#### 3. 6.

Если обозначить первый данный в условии объем  $V$ , а второй  $v$  (в данном случае  $V = 81$ ,  $v = 3$ ), то большая и меньшая пирамиды подобны с коэффициентом подобия  $\sqrt[3]{\frac{V}{v}}$ . Поэтому высота  $H$  большей пирамиды относится к высоте  $h$  меньшей как

$\sqrt[3]{\frac{V}{v}}$ . Так как высота пирамиды, объем которой нужно найти, равна  $H - h$ , то  $\frac{H - h}{h} = \sqrt[3]{\frac{V}{v}} - 1$ . Значит, объем искомой пирамиды равен  $v \left( \sqrt[3]{\frac{V}{v}} - 1 \right)$ .

#### 4. 4030.

Рассматривая график функции  $f$  (рис.9), приходим к выводу, что  $|f(x) + 1| = f(x) + 1$  и  $|f(x) + 1| - 2 = f(x) - 1$ . Поэтому график функции  $f(f(x))$  имеет вид, как на рисунке 10.

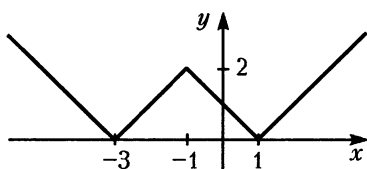


Рис. 9

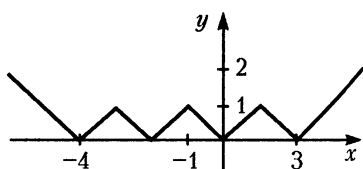


Рис. 10

Уравнение  $f(f(x)) = \frac{1}{2}$  имеет 8 решений. Заметим, что между лучами  $y = -x - 4$ ,  $x \leq -4$  и  $y = x - 3$ ,  $x \geq 3$  находится ровно три треугольника, длины оснований которых равны 2, а высоты — 1. Следующая подстановка  $f(f(f(x)))$  меняет график следующим образом: лучи  $y = -x - 4$ ,  $x \leq -4$  и  $y = x - 3$ ,  $x \geq 3$  перейдут в лучи  $y = -x - 5$ ,  $x \leq -5$  и  $y = x - 4$ ,  $x \geq 4$ , а между ними появится еще один треугольник, длина основания которого равна 2, а высота — 1. Поэтому уравнение  $f(f(f(x))) = \frac{1}{2}$  имеет 10 решений. Каждая следующая подстановка  $f(\dots)$  меняет график функции аналогично: сдвигает на 1 крайние лучи влево и вправо соответственно и добавляет между лучами еще один треугольник, длина основания которого равна 2, а высота — 1. Таким образом, начиная с функции  $f(f(x))$ , каждая следующая подстановка  $f(\dots)$  увеличивает количество решений предыдущего уравнения на два. Получаем, что если применить функцию 2013 раз, то количество корней такого уравнения равно  $8 + 2 \cdot 2011 = 4030$ .

#### 5. 31.

Данное в условии число равно

$$\begin{aligned} & \frac{\sqrt{4024 - 2\sqrt{2013 \cdot 2011}} + \sqrt{4010 - 2\sqrt{2011 \cdot 2009}} + \dots + \sqrt{4 - 2\sqrt{3 \cdot 1}}}{\sqrt{2}} = \\ &= \frac{\sqrt{(\sqrt{2013} - \sqrt{2011})^2} + \sqrt{(\sqrt{2011} - \sqrt{2009})^2} + \dots + \sqrt{(\sqrt{3} - \sqrt{1})^2}}{\sqrt{2}} = \\ &= \frac{\sqrt{2013} - \sqrt{2011} + \sqrt{2011} - \sqrt{2009} + \dots + \sqrt{3} - \sqrt{1}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2013} - 1}{\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

Так как

$$\frac{\sqrt{2013} - 1}{\sqrt{2}} = \frac{2012}{\sqrt{2013 \cdot 2} + \sqrt{2}} > \frac{2012}{64 + 1,5} = \frac{4024}{131} > 30,7$$

и

$$\frac{\sqrt{2013} - 1}{\sqrt{2}} = \frac{2012}{\sqrt{2013 \cdot 2} + \sqrt{2}} < \frac{2012}{63 + 1} = \frac{503}{16} < 31,5,$$

то искомое целое число равно 31.

6.  $14^\circ$ .

Обозначим угол поворота через  $\varphi$  (рис.11). Тогда  $\angle LON = \angle MOK = \varphi$ . Так как  $ON = OL$  (свойство поворота), то  $\angle OLN = \angle ONL = 90^\circ - \frac{\varphi}{2}$ .

Кроме того,  $\angle ONK = \angle OLN = 90^\circ - \frac{\varphi}{2}$  (следствие равенства  $\triangle LOM$  и  $\triangle NOK$ ). Поэтому

$\angle NOP = \frac{\varphi}{2}$ . Это означает, что

$$\alpha = \frac{3\varphi}{2}, \text{ т.е. } \varphi = \frac{2\alpha}{3}.$$

7. 8.

Обозначив  $\sin \frac{\pi x}{4} = t$ , получим  $\sqrt{1-t-3(1-2t^2)} \geq \sqrt{6}t$ , или  $\sqrt{6t^2-t-2} \geq \sqrt{6}t$ . При неотрицательных  $t$  получаем  $6t^2-t-2 \geq 6t^2$ , или  $t \leq -2$ , т.е. решений нет. При  $t < 0$  условие  $6t^2-t-2 \geq 0$  дает  $t \leq -\frac{1}{2}$ . Таким образом, получаем решение

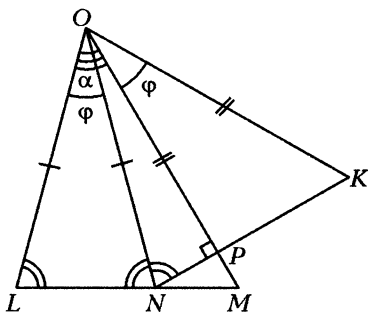


Рис. 11



$$\sin \frac{\pi x}{4} \leq -\frac{1}{2}, \quad \text{откуда} \quad -\frac{5\pi}{6} + 2\pi k \leq \frac{\pi x}{4} \leq -\frac{\pi}{6} + 2\pi k, \quad \text{или}$$

$$-\frac{10}{3} + 8k \leq x \leq -\frac{2}{3} + 8k.$$

Целые решения:  $5 + 8k$ ,  $6 + 8k$ ,  $7 + 8k$ . Из заданного промежутка в ответ войдут: 1991, 1997, 1998, 1999, 2005, 2006, 2007, 2013 – т.е. 8 чисел.

**8. 15.**

В области над графиками функций  $y = x^2$  и  $y = -x^2$  исходное неравенство принимает вид  $2 - x \geq y$ . В области под графиками функций  $y = x^2$  и  $y = -x^2$  исходное неравенство принимает вид  $2 - x \geq -y$ , т.е.  $y \geq x - 2$ . В области, лежащей над графиком функции  $y = -x^2$  и под графиком функции  $y = x^2$ , исходное неравенство имеет вид  $2 - x \geq x^2$ .

Поэтому точки  $(x, y)$ , удовлетворяющие данному неравенству, образуют на координатной плоскости трапецию  $ABCD$ , ограниченную прямыми  $y = -x + 2$ ,  $y = x - 2$ ,  $x = -2$  и  $x = 1$  (рис. 12), вершины которой находятся в точках  $(-2; -4)$ ,  $(-2; 4)$ ,  $(1; 1)$  и  $(1; -1)$ .

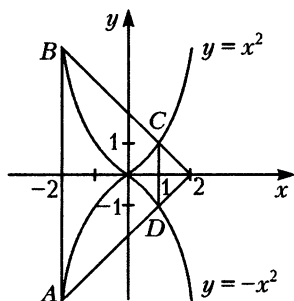


Рис. 12

Так как  $AB = 8$ ,  $CD = 2$ , а высота трапеции равна 3, то искомая площадь равна  $\frac{8+2}{2} \cdot 3 = 15$ .

**9. 89.**

Заметим, что на крыльцо из одной ступеньки Маша может подняться одним способом, а на крыльцо из двух ступенек – двумя: либо наступив на каждую ступеньку, либо, перешагнув через первую ступеньку, попасть сразу на вторую.

Пусть  $a_n$  – количество способов, которыми Маша может подняться на крыльцо, имеющее  $n$  ступенек. Так как на  $n$ -ю ступеньку Маша может подняться либо с  $(n-1)$ -й ступеньки, либо с  $(n-2)$ -й ступеньки, то  $a_n = a_{n-2} + a_{n-1}$ . Последовательно вычисляем:  $a_1 = 1$ ,  $a_2 = 2$ ,  $a_3 = 1 + 2 = 3$ ,  $a_4 = 2 + 3 = 5$ ,  $a_5 = 3 + 5 = 8$ ,  $a_6 = 5 + 8 = 13$ ,  $a_7 = 8 + 13 = 21$ ,  $a_8 = 13 + 21 = 34$ ,  $a_9 = 21 + 34 = 55$ ,  $a_{10} = 34 + 55 = 89$ .

Заметим, что числа, построенные по правилу  $F_0 = 0$ ,  $F_1 = 1$ ,  $F_n = F_{n-2} + F_{n-1}$  ( $n \geq 2$ ), называются числами Фибоначчи. Таким образом,  $a_n = F_{n+1}$ .

10. -47.

$$\begin{aligned}x = \sqrt{2} + \sqrt[3]{5} &\Rightarrow (x - \sqrt{2})^3 = 5 \Rightarrow x^3 - 3x^2\sqrt{2} + 3x \cdot 2 - 2\sqrt{2} = 5 \Rightarrow \\&\Rightarrow x^3 + 6x - 5 = (3x^2 + 2) \cdot \sqrt{2} \Rightarrow (x^3 + 6x - 5)^2 = (3x^2 + 2)^2 \cdot 2 \Rightarrow \\&\Rightarrow P_6(x) = (x^3 + 6x - 5)^2 - 2(3x^2 + 2)^2.\end{aligned}$$

Отсюда находим искомую сумму:

$$a_1 + \dots + a_6 = P_6(1) - 1 = (1 + 6 \cdot 1 - 5)^2 - 2(3 \cdot 1 + 2)^2 - 1 = -47.$$

При этом сам многочлен в явном виде получать не нужно (для справки заметим, что это многочлен  $x^6 - 6x^4 - 10x^3 + 12x^2 - 60x + 17$ ).

*Заключительный этап*

1.  $-\frac{1}{2}$ .

Уравнение имеет корни при  $a^2 - 4a \geq 0$ , т.е. при  $a \leq 0$  и при  $a \geq 4$ . По теореме Виета:  $(|x_1| + |x_2|)^2 = x_1^2 + x_2^2 + 2|x_1x_2| = (x_1 + x_2)^2 + 2(|x_1x_2| - x_1x_2) = 4a^2 + 8(|a| - a)$ . По условию  $4a^2 + 8(|a| - a) = 9$ . При  $a \leq 0$  получаем  $4a^2 - 16a = 9$ , откуда  $a = -\frac{1}{2}$  или  $a = \frac{9}{2}$  (посторонний корень). При  $a \geq 4$  получаем  $4a^2 = 9$ , откуда  $a = \pm \frac{3}{2}$  — оба корня меньше 4.

2. 10070.

Число  $a$  и сумма цифр числа  $a$  при делении на 9 дают одинаковые остатки, поэтому в итоге на доске останется ряд чисел: 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 1, 2, ..., 9, 1, 2, и так далее. Так как  $2014 = 9 \cdot 223 + 7$ , то в этом ряду 223 раза встретится последовательность от 1 до 9 и будет еще 7 цифр. Значит, ряд заканчивается цифрой 8, и искомая сумма чисел равна

$$(1 + 2 + \dots + 9) \cdot 224 - 1 - 9 = 45 \cdot 224 - 10 = 10070.$$

3.  $2\arctg \frac{1}{2} \equiv \arctg \frac{4}{3}$ .

Обозначим острый угол и сторону ромба через  $\alpha$  и  $a$  соответственно. Пусть расстояние от вершины при остром угле ромба до вершины прямоугольника, лежащей на смежной с углом стороне равно  $x$ . Тогда стороны вписанного в ромб прямоугольника равны  $2x \sin \frac{\alpha}{2}$  и  $2(a - x) \cos \frac{\alpha}{2}$ . Площадь пря-

моугольника  $S = 2x(a-x)\sin\alpha$  будет максимальной при  $x = \frac{a}{2}$  (вершина параболы). Следовательно, стороны прямоугольника равны  $a\sin\frac{\alpha}{2}$  и  $a\cos\frac{\alpha}{2}$ . Поскольку отношение сторон равно 2, то  $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2}$ , откуда  $\alpha = 2\arctg\frac{1}{2}$ .

$$4. a = -\frac{1}{2013}, b = \log_{2014} 2013.$$

Из выпуклости вверх графика функции  $y = \log_{2014}(x-a)$  и выпуклости вниз графика функции  $2x^2 - x - b$  следует, что промежуток  $(0; 1)$  является множеством решений неравенства тогда и только тогда, когда числа  $x = 0$  и  $x = 1$  — решения соответствующего уравнения:  $\log_{2014}(x-a) = 2x^2 - x - b$ . Поэтому

$$\begin{cases} \log_{2014}(-a) = -b, \\ \log_{2014}(1-a) = 1-b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \log_{2014}(-a) = -b, \\ \log_{2014}\left(\frac{a-1}{a}\right) = 1, \end{cases}$$

$$\text{откуда } a = -\frac{1}{2013}, b = \log_{2014} 2013.$$

$$5. \alpha \in \left(\pi n; \frac{\pi}{2} + \pi n\right), n \in \mathbb{Z}.$$

$$\begin{aligned} g(x) = 0 &\Leftrightarrow 2\sin 2x - 4\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) - \sqrt{3} = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (2\sin x + \sqrt{3})(2\cos x - 1) = 0 \Leftrightarrow \cos x = \frac{1}{2}, \sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n, x = \frac{4\pi}{3} + 2\pi k, n, k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Расстояния на тригонометрической окружности против часовой стрелки между нулями функции  $g$  (точки  $A$ ,  $B$  и  $C$  на рисунке

13), считая от точки  $A$ , равны  $\pi$ ,  $\frac{\pi}{3}$  и  $\frac{2\pi}{3}$ .

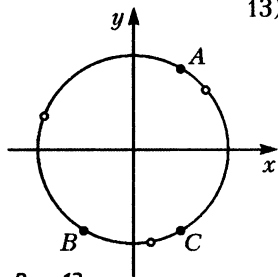


Рис. 13

Нули функции  $f$  равны  $\frac{2\alpha}{3} + \frac{2\pi m}{3}$ ,  $m \in \mathbb{Z}$  и на тригонометрической окружности образуют правильный треугольник. Расстояния между этими точками равны  $\frac{2\pi}{3}$ . Необходимое и достаточное условие чередования нулей этих функций состоит в том, что на дуге  $BC$

содержится нуль функции  $f$ , следовательно, в точках  $B$  и  $C$  функция  $f$  принимает разные знаки:

$$f\left(\frac{4\pi}{3}\right)f\left(\frac{5\pi}{3}\right) < 0 \Leftrightarrow \sin(2\pi - \alpha) \cdot \sin\left(\frac{5\pi}{2} - \alpha\right) < 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \sin 2\alpha > 0 \Leftrightarrow \alpha \in \left(\pi n; \frac{\pi}{2} + \pi n\right), \quad n \in \mathbb{Z}.$$

6.  $2 \cdot 5 \cdot 24 \cdot 500 = 120$  тыс. руб.

1) Двойной оплаты времени охраны точно хватит, поскольку из любого покрытия отрезка конечной системой отрезков можно выбрать не более чем двукратное подпокрытие (если какая-то точка покрыта более чем двумя отрезками, то можно оставить только два из них – с самым левым концом и с самым правым, а остальные выбросить).

2) Менее чем двойной оплаты может не хватить при грамотных действиях охранников: они могут поставить свои дежурства так, чтобы ни одного из них выбросить было нельзя, а суммарная длина дежурств была сколь угодно близкой к удвоенному периоду наблюдения.

7.  $\frac{6\pi r^2}{5}.$

Обозначим через  $r$  радиус шара, а через  $D$ ,  $D_1$ ,  $M$  и  $N$  – середины ребер  $BC$ ,  $B_1C_1$ ,  $BB_1$  и  $CC_1$  соответственно. Плоскость  $AA_1D_1$  есть центральное сечение шара. Пусть  $h$  – высота

цилиндра, тогда радиус его основания равен  $R = \sqrt{r^2 - \frac{h^2}{4}}$ .

Пусть  $P$  – точка пересечения отрезков  $DD_1$  и  $MN$ . Справедливы соотношения  $OP = r$ ,  $PD = r$ ,  $AD = 3r$ , где  $O$  – центр шара. Если  $O_1$  – проекция точки  $O$  на основание цилиндра, то из подобия прямоугольных треугольников  $APD$  и  $OO_1P$  получаем

$$\frac{OO_1}{OP} = \frac{PD}{AP} \Leftrightarrow \frac{OO_1}{r} = \frac{r}{\sqrt{9r^2 + r^2}} = \frac{1}{\sqrt{10}}.$$

Тогда  $OO_1 = \frac{r\sqrt{10}}{10}$ ,  $h = 2OO_1 = \frac{r\sqrt{10}}{5}$ . Значит,  $R = \frac{3r\sqrt{10}}{10}$ .

Площадь боковой поверхности  $S_{\text{бок}} = 2\pi R h = \frac{6\pi r^2}{5}$ .

8. 450.

Пусть в таблице  $m$  строк и  $n$  столбцов, а клетка, получившая одинаковые номера, расположена в строке с номером  $i$  и в столбце с номером  $j$ . Тогда, если считать по строкам, в этой клетке стоит число  $(i-1)n + j$ , а если считать по столбцам, то это

число равно  $(j-1)m+i$ . Следовательно,  $(i-1)n+j=(j-1)m+i \Leftrightarrow (i-1)(n-1)=(j-1)(m-1)$ .

Если  $m=1$  или  $n=1$ , то номера Пети и Васи совпадут во всех клетках. Значит,  $m>1$  и  $n>1$ . Пусть  $d=\text{НОД}(n-1, m-1)$ , тогда отсюда  $n-1=pd$ ,  $m-1=qd$ , где  $\text{НОД}(p, q)=1$ . Получаем  $(i-1)p=(j-1)q$ . Поэтому  $i-1=qk$ ,  $j-1=pk$ ,  $k=0, 1, \dots, d$ . Следовательно, количество клеток, получивших одинаковые номера, равно  $d+1=\text{НОД}(n-1, m-1)+1$ .

Так как  $5681=13 \cdot 19 \cdot 23$ , то  $n=13$ ,  $m=19 \cdot 23=437$  или, наоборот,  $n=437$ ,  $m=13$ . В том и другом случае  $m+n=450$ .

## МЕХАНИКА И МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

### Отборочный этап

#### 1. 1,25 кг.

Объемы подобных тел относятся как куб коэффициента подобия. Так как коэффициент подобия равен  $\frac{324}{1,62}=200$ , то данная копия Эйфелевой башни весит  $\frac{10000}{200^3}$  тонн, что равно  $\frac{10^7}{8 \cdot 10^6} = \frac{10}{8} = \frac{5}{4} = 1,25$  кг.

#### 2. 500 м.

Обозначим  $V$  и  $U$  — скорости велосипедиста и поезда соответственно,  $t_1$ ,  $t_2$  — время движения велосипедиста по ходу поезда и навстречу соответственно,  $h$  — длина поезда,  $l=1200$  м,  $L=1800$  м. Тогда условия задачи можно записать следующим образом:  $(V-U)t_1=h$ ;  $(V+U)t_2=h$ ;  $U(t_1+t_2)=l$ ;  $V(t_1+t_2)=L$ . Из первых двух уравнений выражаем время и подставляем в третье. Тогда для длины поезда

получим зависимость  $h = \frac{l(V^2 - U^2)}{2UV}$ . Если же взять отношение последних двух уравнений, то получим  $\frac{V}{U} = \frac{L}{l}$ . Отсюда следу-

ет, что  $h = \frac{L^2 - l^2}{2L} = 500$  м.

#### 3. 9.

Если было  $n$  табуреток и  $m$  стульев, то ног в комнате  $3n+4m+2(n+m)+2$ , отсюда получаем  $5n+6m=43$ . Это уравнение в целых числах имеет решение  $n=5-6p$ ,  $m=3+5p$ . Значения  $n$  и  $m$  одновременно положительны только при  $p=0$ .

Значит, было 5 табуреток и 3 стула. Поэтому людей в комнате:  $5 + 3 + \text{Гаврила}$ .

4. 49 км/ч.

Кинетическая энергия поезда  $\frac{mV^2}{2}$  будет равна потенциальной энергии той части поезда, которая въехала в горку  $\frac{mg}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{L}{4} \cdot \sin \alpha$ . Тогда получим  $V = \sqrt{\frac{gL}{16} \sin \alpha} = \sqrt{\frac{375}{2}} = \frac{5}{2} \sqrt{30}$  м/с, что составляет  $\frac{5}{2} \sqrt{30} \cdot \frac{3600}{1000} = 9\sqrt{30}$  км/ч. Так как верно двойное неравенство  $49 < 9\sqrt{30} < 49,5$  (проверяется возведением в квадрат), то ответ: 49.

5. 6 с.

Из закона движения для тела, брошенного с уровня земли под углом к горизонту  $\alpha$ , дальность полета определяется соотношением  $L = \frac{V_0^2}{g} \sin 2\alpha$ . Поэтому максимальная дальность полета получается при  $\alpha = 45^\circ$  и равна  $L = \frac{V_0^2}{g}$ . Значит,  $V_0 = \sqrt{gL}$ .

Первым упадет на землю осколок, вылетающий вертикально вниз, последним – вылетающий вертикально вверх. Спустя время  $\tau = \frac{2V_0}{g}$  последний осколок вернется на место взрыва, т.е. окажется в ситуации первого осколка. Поэтому искомый промежуток времени равен  $\tau = \frac{2V_0}{g}$  (не зависит от высоты  $H$ ). Значит,  $\tau = \frac{2\sqrt{gL}}{g} = 2\sqrt{\frac{L}{g}} = 6$  с.

6. 1 м/с.

В соответствии с первым началом термодинамики можно записать

$$q\Delta t = \Delta A + \Delta U, \quad (1)$$

где  $\Delta t$  – промежуток времени,  $\Delta A$  – совершенная газом работа,  $\Delta U$  – изменение внутренней энергии. Так как процесс изобарный, то для работы и внутренней энергии можно записать следующие соотношения:

$$\Delta A = \left(p_0 + \frac{P}{S}\right) \cdot \Delta V, \quad \Delta U = \frac{3}{2} \nu R \cdot \Delta T = \frac{3}{2} \left(p_0 + \frac{P}{S}\right) \cdot \Delta V, \quad (2)$$

где  $\nu$  – количество вещества. Подставив (2) в (1), получим

$q\Delta t = \frac{5}{2} \left( p_0 + \frac{P}{S} \right) \cdot S \cdot \Delta h$ , откуда следует соотношение для скорости движения поршня:

$$\frac{\Delta h}{\Delta t} = \frac{2q}{5(p_0 S + P)} = \frac{2 \cdot 500}{5 \cdot (10^5 \cdot 10 \cdot 10^{-4} + 100)} = 1 \text{ м/с.}$$

*Заключительный этап*

1.  $\sqrt{339696} = 12\sqrt{2359} \approx 583 \text{ км/ч.}$

Нужная скорость находится по теореме косинусов из треугольника скоростей с известными сторонами 36 км/ч (это 10 м/с) и 600 км/ч (скорость, с которой преодолевается 900 км за 1,5 часа) и углом между ними  $60^\circ$ . По теореме косинусов скорость равна корню из  $36^2 + 600^2 - 36 \cdot 600 = 339696$ , т.е.  $12\sqrt{2359} = \sqrt{339696}$  км/ч. Для нахождения ближайшего целого требуется оценка:  $582,5^2 < 339696$ ,  $583^2 > 339696$ . Поэтому ближайшее целое: 583.

2. а) Не может; б) от 16 км до  $\sqrt{544} = 4\sqrt{34}$  км (не включая эти значения).

Если обозначить стороны треугольника  $ABC$  через  $x, y, z$ , а расстояния от объектов до аэростата через  $a, b, c$ , то по теореме Пифагора:  $a^2 + b^2 = x^2$ ,  $b^2 + c^2 = y^2$ ,  $c^2 + a^2 = z^2$ . Отсюда  $a^2 = \frac{z^2 + x^2 - y^2}{2}$ ;  $b^2 = \frac{x^2 + y^2 - z^2}{2}$ ;  $c^2 = \frac{y^2 + z^2 - x^2}{2}$ . Положительное решение  $a, b, c$  этой системы уравнений найдется тогда и только тогда, когда  $z^2 + x^2 > y^2$ ,  $x^2 + y^2 > z^2$ ,  $y^2 + z^2 > x^2$ . Если  $x = 12$ ,  $y = 20$ , то  $20^2 - 12^2 < z^2 < 20^2 + 12^2$ , откуда  $z \in (16; \sqrt{544})$ . Так как  $24 > 4\sqrt{34}$ , то расстояние  $AB$  не может быть равным 24.

Возможно и геометрическое решение. Пусть аэростат находится в центре трехмерной системы координат, а объекты находятся на положительных полуосях  $Ox$ ,  $Oy$  и  $Oz$ . Если провести плоскость через эти три объекта (пересечь трехгранный угол плоскостью), то получится остроугольный треугольник. С другой стороны, для любого остроугольного треугольника такая площадь существует. Поэтому ситуация возможна тогда и только тогда, когда  $x, y, z$  будут сторонами остроугольного треугольника. Это означает, что  $z^2 + x^2 > y^2$ ,  $x^2 + y^2 > z^2$ ,  $y^2 + z^2 > x^2$ .

3. а) Да; б) через 4 секунды.

Заяц движется по закону  $x = 10 + 12t$ ,  $y = 40 + t^2$ , а Волк по закону  $x = 10 + 15t \cos \alpha$ ,  $y = 20 + 15t \sin \alpha$ , где  $\alpha$  — угол накло-

на прямой, по которой движется волк. Условие встречи:

$$\begin{cases} 10 + 12t = 10 + 15t \cos \alpha, \\ 40 + t^2 = 20 + 15t \sin \alpha. \end{cases}$$

Из первого уравнения  $\cos \alpha = \frac{4}{5}$ , поэтому  $\sin \alpha = \frac{3}{5}$ , и из второго уравнения:  $t^2 - 9t + 20 = 0$ , откуда  $t = 4$  или  $t = 5$ . Значение  $t = 5$  следует отбросить, так как встреча в момент времени  $t = 4$  произойдет раньше (на этой же прямой!).

4.  $\arctg \frac{1}{\sqrt{2}}$ .

Горизонтальная скорость санок равна  $V_x = V \cos \alpha$ , условие баланса сил  $mg \sin \alpha = kV^2$ . Отсюда  $V_x = \sqrt{\frac{mg \sin \alpha}{k}} \cos \alpha$ . Таким образом, задача сводится к нахождению значения  $\alpha$ , при котором достигает максимума функция  $f(\alpha) = \sqrt{\sin \alpha} \cos \alpha$ . Точка максимума находится с помощью производной. Так как  $f'(\alpha) = \frac{\cos^2 \alpha}{2\sqrt{\sin \alpha}} - \sqrt{\sin \alpha} \sin \alpha$ , то  $\frac{\cos^2 \alpha}{2\sqrt{\sin \alpha}} = \sqrt{\sin \alpha} \sin \alpha$ , откуда  $\operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{2}$ . Поэтому  $\alpha = \arctg \frac{1}{\sqrt{2}}$ .

5. Отношение равно 5.

Если обозначить  $m$  — отношение максимального давления к минимальному давлению,  $n$  — отношение максимального объема к минимальному объему, то выражение для КПД будет иметь вид

$$\begin{aligned} \eta &= \frac{(p_{\max} - p_{\min})(V_{\max} - V_{\min})}{\frac{3}{2}V_{\min}(p_{\max} - p_{\min}) + \frac{5}{2}p_{\max}(V_{\max} - V_{\min})} = \\ &= \frac{1}{\frac{3}{2} \cdot \frac{1}{n-1} + \frac{5}{2} \cdot \frac{m}{m-1}}. \end{aligned}$$

После преобразований получается

$$\eta = \frac{2(n-1)(m-1)}{3(m-1) + 5m(n-1)} = \frac{2(mn - m - n + 1)}{5mn - 2m - 3}.$$

Далее решаем уравнение в целых числах:

$$\frac{2(mn - m - n + 1)}{5mn - 2m - 3} = \frac{8}{33};$$



$$33mn - 33m - 33n + 33 = 20mn - 8m - 12;$$

$$33n + 25m = 13mn + 45;$$

$$m = \frac{33n - 45}{13n - 25} = \frac{\frac{33}{13}(13n - 25) + \frac{33 \cdot 25}{13} - 45}{13n - 25} =$$

$$= \frac{33}{13} + \frac{33 \cdot 25 - 45 \cdot 13}{13(13n - 25)}.$$

Поэтому  $13m = 33 + \frac{240}{13n - 25}$ , и число  $240 = 2^4 \cdot 3 \cdot 5$  должно делиться на  $(13n - 25)$ . Перебором получаются 2 пары решений:  $n = 2, m = 21$  и  $n = 5, m = 3$ . Максимальное  $n$  равно 5.

6. При четных  $n$  за каждую секунду проходятся одинаковые расстояния; при нечетных  $n$  — возможно также и другое движение.

По условию  $x(n) = qx(n-1)$ , где  $q$  — коэффициент пропорциональности,  $x(i)$  — изменение координаты. Следовательно,  $x(i)$  образуют геометрическую прогрессию со знаменателем  $q$ . Дополнительное условие  $S(n) = nx(1)$ .

Ясно, что если  $q = 1$ , то  $x(n) = x(1)$  и  $S(n) = nx(1)$ . Поэтому  $q = 1$  удовлетворяет условию. Значит, вопрос задачи формулируется следующим образом: при каких  $n$  уравнение

$$S_n = \frac{(q^n - 1)}{q - 1} = nx_1 \text{ имеет решение } q \neq 1?$$

1) Рассмотрим четные  $n$ , т.е.  $n = 2m$ . Получаем уравнение  $q^{2m} = 2m(q - 1) + 1$ . Построив графики функций  $y = q^{2m}$  и  $y = 2m(q - 1) + 1$ , убеждаемся, что при  $q = 1$  есть решение. Кроме того, вторая функция совпадает с касательной к графику первой, проведенной в точке  $q = 1$ . Поэтому решений  $q \neq 1$  нет.

2) Пусть  $n = 2m + 1, n = 2m$ . Построив соответствующие графики, устанавливаем, что кроме касания при  $q = 1$ , имеется еще ровно одно пересечение при  $q < 1$ .

Поэтому при четных  $n$  за каждую секунду проходятся одинаковые расстояния, а при нечетных  $n$  также возможно другое движение.

## ФИЗИКА

### Отборочный этап

7–9 классы

1. Коэффициент полезного действия механизма по определению равен

$$\eta = \frac{A_{\text{п}}}{A_3} \cdot 100\%,$$

где  $A_{\text{п}}$  – полезная работа по перемещению ящика,  $A_3$  – полная (затраченная) работа. Пусть вертикальное перемещение ящика составило некоторую величину  $h$ . Тогда

$$A_{\text{п}} = mgh, \quad A_3 = Fs = F \frac{h}{\sin \alpha}.$$

Отсюда

$$\eta = \frac{mg}{F} \sin \alpha \cdot 100\% = 90\%.$$

2. Условие равновесия тела имеет вид

$$N = mg + F_{\downarrow},$$

где  $F_{\downarrow}$  – суммарная сила давления со стороны жидкости на верхнюю полусферическую поверхность тела. Если бы жидкость подтекала под нижнюю поверхность тела, то на него действовала бы выталкивающая сила  $F_{\text{выт}} = \rho g V$ . Эта сила равна разности сил давления со стороны жидкости на нижнюю (плоскую) и верхнюю (полусферическую) поверхности тела:

$$F_{\text{выт}} = F_{\uparrow} - F_{\downarrow}.$$

Отсюда находим

$$\begin{aligned} N = mg + F_{\downarrow} &= mg + F_{\uparrow} - F_{\text{выт}} = mg + \rho gh \cdot \pi R^2 - \rho g \cdot \frac{2}{3} \pi R^3 = \\ &= mg + \rho g \pi R^2 \left( h - \frac{2}{3} R \right) \approx 93 \text{ Н}. \end{aligned}$$

3. Обозначим через  $I$  силу тока в цепи. Тогда полная мощность, выделяющая в цепи, равна  $UI$ , а мощность, выделяющаяся на резисторе сопротивлением  $r$ , равна  $I^2 r$ . Если через  $P_x$  обозначить мощность, выделяющаяся на резисторе с неизвестным сопротивлением, то можно записать

$$UI = I^2 r + P_x, \text{ или } P_x = UI - I^2 r.$$

Поскольку  $P_x$  обращается в ноль при  $I_1 = 0$  и  $I_2 = \frac{U}{r}$ , то

максимум квадратичной функции  $P_x(I)$  достигается при

$$I = I_0 = \frac{I_1 + I_2}{2} = \frac{U}{2r}.$$

Мощность, выделяющаяся при этом на резисторе сопротивлением  $r$ , равна

$$P = I_0^2 r = \frac{U^2}{4r} = 25 \text{ Вт}.$$

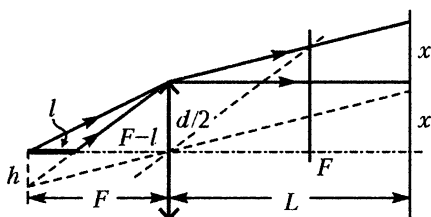


Рис. 14

4. Ход лучей, испущенных двумя точками, находящимися на противоположных концах нити, изображен на рисунке 14. Видно, что диаметр светового пятна на экране определяется лучами, выходящими из ближнего к линзе конца нити и проходящими через край линзы. Из подобия треугольников имеем

$$\frac{x}{h} = \frac{L}{F}, \quad \frac{h}{l} = \frac{d/2}{F-l}.$$

Исключая из этих выражений  $h$ , находим

$$x = \frac{dLl}{2F(F-l)}.$$

Учитывая, что  $D = d + 2x$ , получаем

$$D = d \left( 1 + \frac{Ll}{F(F-l)} \right) = 12 \text{ мм}.$$

5. В момент начала движения зайца волк находился в точке  $A_1$  (рис.15), расстояние  $A_1B$  равно  $L_1 = L - v_1 t_0$ . Перейдем в систему координат, движущуюся вместе с зайцем. Заяц в этой системе неподвижен, а у волка появляется дополнительная скорость  $-v_2$ , направленная против движения новой системы отсчета. Из рисунка 15 видно, что модуль скорости

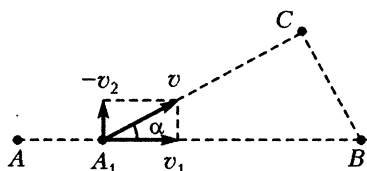


Рис. 15

волка относительно зайца равен

$$v = \sqrt{v_1^2 + v_2^2},$$

а угол  $\alpha$  между векторами  $\vec{v}$  и  $\vec{v}_1$  удовлетворяет соотношению

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{v_2}{v_1} = \frac{1}{2}.$$

Расстояние между волком и зайцем минимально, когда волк находится в точке  $C$ , причем  $BC \perp A_1C$ . После начала движения волк окажется в точке  $C$  через время

$$\begin{aligned} t_1 = t_0 + \frac{L_1 \cos \alpha}{v} &= t_0 + \frac{L_1 \cos^2 \alpha}{v_1} = \\ &= t_0 + \frac{(L/v_1 - t_0)}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} = t_0 + \frac{(L/v_1 - t_0)}{1 + (v_2/v_1)^2} = 532 \text{ с.} \end{aligned}$$

6. По второму закону Ньютона уравнение движения шарика имеет вид

$$m\vec{a} = m\vec{g} - k\vec{u},$$

где  $m$  – масса шарика,  $\vec{a}$  – его ускорение,  $k$  – коэффициент сопротивления. В проекции на координатную ось, направленную вертикально вверх и имеющую начало в точке вылета шарика из ствола пистолета, имеем

$$m \frac{\Delta u}{\Delta t} = -mg - k \frac{\Delta y}{\Delta t}, \text{ или } m \cdot \Delta u = -mg \cdot \Delta t - k \cdot \Delta y.$$

Поскольку  $m$ ,  $g$  и  $k$  – постоянные величины, отсюда следует равенство

$$m(u(\tau) - u(0)) = -mg\tau - k(y(\tau) - y(0)).$$

Подставляя в это равенство  $u(0) = u_1$ ,  $u(\tau) = -u_2$ ,  $y(0) = 0$ ,  $y(\tau) = 0$ , получаем

$$m(u_1 + u_2) = mg\tau,$$

откуда

$$u_1 = g\tau - u_2 = 50 \text{ м/с}.$$

10–11 классы

*Первый тур*

1. Пренебрегая импульсом силы трения во время броска камня, по закону сохранения импульса имеем

$$mv = Mv,$$

где  $v$  – модуль скорости мальчика после броска. Согласно закону изменения механической энергии мальчика при его скольжении

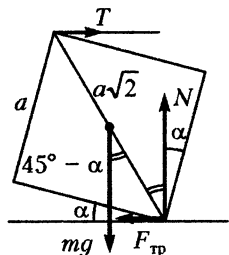
по льду,

$$\frac{Mv^2}{2} = |A_{\text{тр}}|,$$

где  $|A_{\text{тр}}| = \mu MgL$  – модуль работы силы трения. Отсюда находим

$$\mu = \frac{m^2 u^2}{2M^2 gL} = 0,1.$$

2. Обозначим модуль силы натяжения нити через  $T$ . Так как кубик покоится, то моменты силы натяжения и силы тяжести  $mg$  относительно оси, проходящей через точки касания кубиком плоскости, должны быть равны (рис. 16):



$$T \cdot a\sqrt{2} \cos\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) = mg \cdot a \frac{\sqrt{2}}{2} \sin\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right),$$

где  $a$  – длина ребра кубика. Отсюда

$$T = \frac{1}{2} mg \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right).$$

Рис. 16

Силу натяжения нити  $T$  должна уравновешивать сила трения  $F_{\text{тр}}$  кубика о плоскость, а нормальная составляющая  $N$  силы реакции плоскости должна уравновешивать силу тяжести  $mg$ , действующую на кубик. Поэтому модуль искомой силы равен

$$F = \sqrt{F_{\text{тр}}^2 + (mg)^2} = mg \sqrt{\frac{1}{4} \operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) + 1} = 0,52 \text{ Н.}$$

3. Обозначим начальную абсолютную температуру газа через  $T_1$ , температуру газа после изохорного нагревания через  $T_2$ , а конечную температуру через  $T_3$ . Тогда, согласно закону Менделеева–Клапейрона,

$$p_1 V_1 = \frac{m}{M} RT_1, \quad p_2 V_1 = \frac{m}{M} RT_2, \quad p_2 V_3 = \frac{m}{M} RT_3.$$

Поскольку  $A = p_2 (V_1 - V_3)$ , то

$$T_3 = \frac{AV_3 M}{(V_1 - V_3)mR}, \text{ и } \Delta T = T_3 - T_1 = \left( \frac{AV_3}{V_1 - V_3} - p_1 V_1 \right) \frac{M}{mR} \approx 60 \text{ К.}$$

4. Емкость двух последовательно соединенных конденсаторов до заполнения одного из них диэлектриком равна  $C_{\text{н}} = \frac{C}{2}$ , а после заполнения –  $C_{\text{к}} = \frac{\epsilon C}{\epsilon + 1}$ . Поэтому установившийся заряд

на каждом из конденсаторов в начальном и конечном состояниях будет

$$q_n = C_n \mathcal{E} = \frac{C \mathcal{E}}{2}, \quad q_k = C_k \mathcal{E} = \frac{\varepsilon C \mathcal{E}}{\varepsilon + 1},$$

а энергия конденсаторов в начальном и конечном состояниях равна

$$W_n = \frac{q_n^2}{2C_n}, \quad W_k = \frac{q_k^2}{2C_k}.$$

Заряд, протекавший через батарейку после заполнения одного из конденсаторов диэлектриком, равен  $\Delta q = q_k - q_n$ . Максимальная работа сторонних сил после заполнения конденсатора диэлектриком равна  $A = \mathcal{E} \Delta q$ , а изменение электростатической энергии конденсаторов равно  $\Delta W = W_k - W_n$ . Согласно закону сохранения энергии, искомое количество теплоты равно

$$Q = A - \Delta W = \frac{C \mathcal{E}^2}{4} \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 1} \approx 0,83 \text{ нДж}.$$

5. Так как требуется найти минимальную толщину пластинки, то ход крайнего луча пучка должен быть таким, как показано на рисунке 17. По закону преломления,

$$\sin \alpha = n \sin \beta.$$

Из рисунка видно, что

$$R \left( 1 - \frac{1}{k} \right) = h \operatorname{tg} \beta.$$

Учитывая, что

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{\sin \beta}{\sqrt{1 - \sin^2 \beta}} = \frac{\sin \alpha}{\sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha}},$$

находим

$$h = \frac{(k - 1) R \sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha}}{k \sin \alpha} \approx 5,65 \text{ см}.$$

Второй тур

1. Поскольку плот движется по воде без трения, центр масс системы «человек – плот» будет оставаться неподвижным. Следовательно,

$$x_{\text{ц}} = \frac{-Mx + m(l - x)}{M + m} = 0,$$

где  $l = \sqrt{S/2}$  – перемещение человека относительно плота,

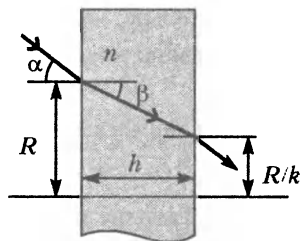


Рис. 17

равное половине диагонали плота. Отсюда находим

$$x = \frac{ml}{M+m} = \frac{m}{M+m} \sqrt{\frac{S}{2}} \approx 33 \text{ см}.$$

2. Доска и ящик движутся под действием сил, модули и направления которых изображены на рисунке 18. Уравнения движения доски и ящика в предположении, что ящик не перемещается по доске, имеют вид

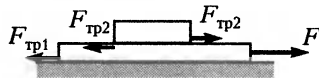


Рис. 18

$$ma = F - F_{\text{тр1}} - F_{\text{тр2}}, \quad Ma = F_{\text{тр2}}.$$

Отсюда получаем

$$F = (M+m)a + F_{\text{тр1}}.$$

Сила трения скольжения между доской и полом равна

$$F_{\text{тр1}} = \mu_1 (M+m)g,$$

а максимальное значение силы трения покоя между ящиком и доской равно

$$F_{\text{тр2}} = \mu_2 Mg.$$

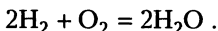
Следовательно, максимальное значение ускорения ящика составляет

$$a = \mu_2 g.$$

Из записанных выражений находим

$$F = (\mu_1 + \mu_2)(M+m)g = 480 \text{ Н}.$$

3. Уравнение реакции горения водорода в кислороде имеет вид



Отсюда следует, что количество молей сгоревшего водорода равно количеству молей образовавшегося водяного пара и вдвое превышает количество молей требующегося для горения кислорода. Поскольку  $0,23v_2 > \frac{v_1}{2}$ , имеющегося в сосуде воздуха с избытком хватит для полного сгорания водорода. Следовательно, в воздухе образуется  $v_1$  молей водяного пара. Используя уравнение Менделеева-Клапейрона, находим парциальное давление водяного пара:

$$p = \frac{v_1 RT}{V},$$

где  $T = t + 273 \text{ }^\circ\text{C} = 293 \text{ К}$ . Относительная влажность воздуха

равна

$$\varphi = \frac{p}{p_n} \cdot 100\% = \frac{v_1 RT}{p_n V} \cdot 100\% \approx 52\% .$$

4. Относительно неподвижной системы отсчета скорость шарика равна

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{u} .$$

Сила Лоренца, действующая на шарик, перпендикулярна  $\vec{v}$  и по модулю равна

$$F_L = qvB = qB\sqrt{v_0^2 + u^2} .$$

Разложим ее на две составляющие: параллельную трубке  $\vec{F}_{\parallel}$  и перпендикулярную трубке  $\vec{F}_{\perp}$ . Из рисунка 19 видно, что

$$F_{\parallel} = F_L \sin \alpha , \quad F_{\perp} = F_L \cos \alpha .$$

Поскольку

$$\sin \alpha = \frac{v_0}{\sqrt{v_0^2 + u^2}} , \quad \cos \alpha = \frac{u}{\sqrt{v_0^2 + u^2}} ,$$

то

$$F_{\parallel} = qv_0 B , \quad F_{\perp} = quB .$$

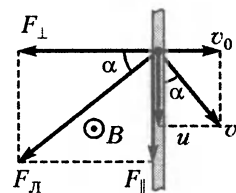


Рис. 19

Скорость движения шарика относительно трубки определяется из условия

$$F_{\parallel} = \alpha u .$$

Искомая мощность равна

$$N = F_{\perp} v_0 = \frac{(qv_0 B)^2}{\alpha} \approx 2,5 \text{ пВт} .$$

5. Пусть  $\alpha$  – угол падения крайнего луча на пластину,  $\beta$  – соответствующий угол преломления,  $r_1$  – радиус пучка на входе в плоскопараллельную пластину,  $x$  – разность между радиусами пучка на выходе и на входе в пластину (рис.20). Тогда

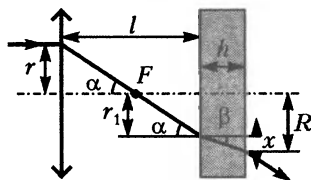


Рис. 20

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{r}{F} = \frac{r_1}{l - F} , \quad R = r_1 + x , \quad \operatorname{tg} \beta = \frac{x}{h} , \quad \sin \alpha = n \sin \beta .$$

Отсюда

$$R = \frac{(l - F)r}{F} + \frac{h}{\sqrt{(1 + F^2/r^2)n^2 - 1}} \approx 8,3 \text{ мм} .$$



### Третий тур

1. Пусть  $m_1$  и  $m_2$  – массы брусков. По законам сохранения импульса и механической энергии имеем

$$m_1 v_1 = m_2 v_2, \quad E_{\text{п}} = \frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2}.$$

Учитывая, что  $m_1 + m_2 = M$ , находим

$$E_{\text{п}} = \frac{1}{2} M v_1 v_2 = 24 \text{ Дж}.$$

2. Груз движется вместе с тележкой равноускоренно под действием силы упругости пружины. По второму закону Ньютона,

$$ma = kx_0,$$

где  $m$  – масса груза,  $k$  – жесткость пружины,  $x_0$  – ее удлинение. Амплитуду возникших колебаний можно найти с помощью закона сохранения энергии

$$\frac{kx_0^2}{2} + \frac{mv^2}{2} = \frac{kA^2}{2}.$$

Учитывая, что

$$\frac{m}{k} = \frac{T^2}{4\pi^2},$$

получаем

$$A = \frac{T}{2\pi} \sqrt{\frac{a^2 T^2}{4\pi^2} + v^2} \approx 20,3 \text{ см}.$$

3. Обозначим теплоемкость спирта через  $C_0$ , теплоемкость первого кубика через  $C_1$ , а второго кубика через  $C_2$ . Поскольку  $C_1 = c\rho a^3$  и  $C_2 = c\rho b^3$ , где  $c$  – удельная теплоемкость стали, а  $\rho$  – ее плотность, то  $C_2 = C_1 (b/a)^3$ . Уравнения теплового баланса имеют вид

$$C_0(t - t_1) = C_1(t_1 - t_0), \quad (C_0 + C_1)(t_3 - t_1) = C_2(t_2 - t_3).$$

Отсюда получим равенство

$$\frac{t_3 - t_1}{t - t_1} = \frac{(b/a)^3(t_2 - t_3) - (t_3 - t_1)}{t_1 - t_0},$$

из которого найдем

$$t_2 = t_3 + \left(\frac{a}{b}\right)^3 \frac{(t_3 - t_1)(t - t_0)}{t - t_1} \approx 41,9^\circ\text{C}.$$

4. При параллельном соединении двух одинаковых батарей с ЭДС  $\mathcal{E}$  и внутренними сопротивлениями  $r$  внутреннее сопротивление образовавшегося источника становится равным  $r/2$ , а ЭДС источника остается равной ЭДС  $\mathcal{E}$  одной батареи. Поэтому исходные уравнения таковы:

$$I_1 = \frac{\mathcal{E}}{R_1 + r}, \quad I_2 = \frac{\mathcal{E}}{R_2 + r}, \quad I_3 = \frac{\mathcal{E}}{R_3 + r/2}.$$

Отсюда находим

$$I_3 = \frac{2I_1I_2(R_1 - R_2)}{2R_3(I_2 - I_1) + I_1R_1 - I_2R_2} \approx 0,67 \text{ А}.$$

5. Ход лучей изображен на рисунке 21. При исходном положении линз для рассеивающей линзы имеем

$$-\frac{1}{F_1 - l} + \frac{1}{b_1} = -\frac{1}{F_2},$$

откуда находим

$$b_1 = \frac{F_2(F_1 - l)}{F_2 - F_1 + l},$$

где  $b_1$  – расстояние от правой линзы до фокуса системы линз (точки 1) в первом случае. После перестановки линз для собирающей линзы можно записать

$$\frac{1}{F_2 + l} + \frac{1}{b_2} = \frac{1}{F_1},$$

откуда получаем

$$b_2 = \frac{F_1(F_2 + l)}{F_2 - F_1 + l},$$

где  $b_2$  – расстояние от правой линзы до фокуса системы линз (точки 2) во втором случае. Следовательно,

$$\Delta x = b_2 - b_1 = \frac{l(F_1 + F_2)}{F_2 - F_1 + l} \approx 16,7 \text{ см}.$$

*Заключительный этап*

7–9 классы

1. Модуль искомой скорости будет наибольшим, если тяжелый осколок полетит в направлении скорости снаряда перед его взрывом, а два других – в противоположную сторону. Обозначим через  $u$  модуль скорости каждого из легких осколков. Тогда,

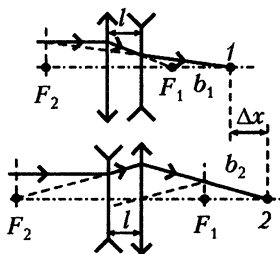


Рис. 21

по закону сохранения импульса,

$$4mv = 2mv_3 - 2mu,$$

а по закону сохранения механической энергии,

$$\frac{4mv^2}{2} + \Delta E_{\kappa} = \frac{m}{2}(2v_3^2 + 2u^2).$$

Исключая из этих уравнений  $u$ , приходим к квадратному уравнению относительно  $v_3$ :

$$v_3^2 - 2v_3v + v^2 - \frac{\Delta E_{\kappa}}{2m} = 0,$$

откуда находим

$$v_3 = v \pm \sqrt{\frac{\Delta E_{\kappa}}{2m}}.$$

Учитывая, что  $\sqrt{\frac{\Delta E_{\kappa}}{2m}} = 300 \text{ м/с} > v = 50 \text{ м/с}$ , выбираем положительный корень. Итак,

$$v_3 = v + \sqrt{\frac{\Delta E_{\kappa}}{2m}} = 350 \text{ м/с}.$$

2. До охлаждения масса водяных паров в банке была равна

$$m_{\kappa} = \frac{\varphi}{100\%} \rho_{\kappa} V.$$

После охлаждения масса насыщенного пара в банке станет равной

$$m_x = \rho_x V.$$

Поэтому масса образовавшегося в банке льда равна

$$m = m_{\kappa} - m_x = \left( \frac{\varphi}{100\%} \rho_{\kappa} - \rho_x \right) V \approx 24,8 \cdot 10^{-3} \text{ г} \approx 25 \text{ мг}.$$

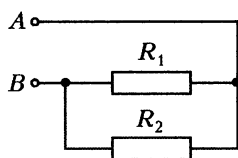


Рис. 22

3. Эквивалентная схема цепи изображена на рисунке 22. Видно, что резисторы сопротивлениями  $R_1$  и  $R_2$ , представляющие собой левый и правый участки реостата, соединены параллельно. При этом

$$R_1 = \frac{rx}{L} = 4 \text{ Ом}, \quad R_2 = \frac{r(L-x)}{L} = 12 \text{ Ом}.$$

По формуле для сопротивления двух параллельно соединенных резисторов получаем

$$R = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = \frac{x(L-x)}{L^2} r = 3 \text{ Ом}.$$

4. Ход луча, падающего на зеркало и отраженного от него, изображен на рисунке 23. Видно, что угол  $\gamma$  между падающим лучом и нормалью к зеркалу равен

$$\gamma = \frac{1}{2}(90^\circ + \alpha) = 45^\circ + \frac{\alpha}{2}.$$

По закону отражения угол  $\delta$  между нормалью к зеркалу и отраженным лучом равен углу  $\gamma$ . Согласно теореме о равенстве углов с взаимно перпендикулярными сторонами,  $\beta = \delta$ . Таким образом,

$$\beta = 45^\circ + \frac{\alpha}{2} = 61^\circ.$$

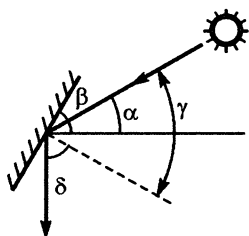


Рис. 23

10–11 классы

1. Работа силы трения на этапе торможения боба равна

$$A_{\text{тр}} = -\frac{1}{2} \alpha s_0^2 m g,$$

где  $s_0$  – тормозной путь боба. По закону сохранения и превращения механической энергии,

$$\left( \frac{mv_0^2}{2} + mgh \right) \left( 1 - \frac{\eta}{100\%} \right) - \frac{1}{2} \alpha s_0^2 m g = 0,$$

откуда

$$s_0 = \sqrt{\frac{(v_0^2 + 2gh)(1 - \eta/100\%) }{\alpha g}}.$$

По второму закону Ньютона на участке торможения,

$$ma_x = -\mu mg, \text{ или } x'' + \alpha g \cdot x = 0.$$

Так как это уравнение совпадает с уравнением гармонических колебаний, то до момента остановки боб движется по закону

$$x(t) = s_0 \sin \omega_0 t, \text{ причем } \omega_0 = \sqrt{\alpha g}.$$

Скорость боба при этом меняется по закону

$$u = u_0 \cos \omega_0 t,$$

где  $u_0 = \omega_0 s_0$  – скорость боба в момент пересечения линии финиша. По условию задачи в момент времени  $\tau$  выполняется равенство

$$x(\tau) = \frac{s_0}{2}.$$

Следовательно,

$$\omega_0 \tau = \arcsin \frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}.$$

Скорость боба в момент времени  $\tau$  равна

$$u = u_0 \cos \omega_0 \tau = \frac{1}{2} \sqrt{3(v_0^2 + 2gh)}(1 - \eta/100\%) \approx 40,1 \text{ м/с}.$$

2. Пусть  $m$  – первоначальная масса паров воды,  $M$  – ее молярная масса,  $V$  – первоначальный, а  $V_k$  – конечный объемы воздуха,  $p_n = 1$  атм – давление насыщенных паров воды при температуре  $t = 100^\circ\text{C}$ ,  $p_{в0}$  – первоначальное, а  $p_{вк}$  – конечное давления сухого воздуха. По закону Дальтона,

$$p_{в0} = p_0 - \varphi p_n, \quad p_k = p_{вк} + p_n.$$

Так как

$$m = \frac{M \varphi p_n V}{RT} \quad \text{и} \quad (1 - n)m = \frac{M p_n V_k}{RT},$$

то

$$V_k = \varphi(1 - n)V \quad \text{и} \quad p_{вк} = \frac{p_{в0}}{\varphi(1 - n)}.$$

Окончательно,

$$p_k = \frac{p_0 - n \varphi p_n}{\varphi(1 - n)} = 5 \text{ атм}.$$

3. На шарик, находящийся в воздухе, действуют сила тяжести  $m\vec{g}$ , кулоновская сила  $\vec{F}_K$  и сила натяжения нити  $\vec{T}$  (рис.24). Из условия равновесия шарика следует, что

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{F_K}{mg}.$$

В жидкости к перечисленным силам добавится архимедова сила  $\vec{F}_A$ , направленная вверх, а кулоновская сила уменьшится в  $\epsilon$  раз, т.е.

$F'_K = \frac{F_K}{\epsilon}$ . Поскольку угол отклонения нити не изменяется, условие равновесия шарика приводит к равенству

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{F'_K}{mg - F_A}.$$

Рис. 24

Обозначим через  $V$  объем шарика. Тогда  $m = \rho V$ ,  $F_A = \rho_0 V g$ . Объединяя записанные выражения, получаем равенство

$\rho = \varepsilon(\rho - \rho_0)$ , из которого находим

$$\rho = \frac{\varepsilon}{\varepsilon - 1} \rho_0 = 1,2 \text{ г/см}^3.$$

4. Обозначим через  $d$  и  $f$  расстояния от предмета до линзы и от линзы до экрана. По формуле тонкой линзы,  $\frac{1}{d} + \frac{1}{f} = \frac{1}{F}$ , а по условию,  $f = L - d$ . Из записанных выражений получаем квадратное уравнение относительно  $d$ :

$$d^2 - Ld + LF = 0.$$

Корни этого уравнения

$$d_{1,2} = \frac{L}{2} \left( 1 \pm \sqrt{1 - 4F/L} \right).$$

Поэтому

$$f_{1,2} = \frac{L}{2} \left( 1 \mp \sqrt{1 - 4F/L} \right).$$

Увеличение, даваемое линзой, равно

$$\Gamma = \frac{f}{d}.$$

Это выражение максимально, если  $f = f_{\max} = f_2$ ,  $d = d_{\min} = d_1$ . Следовательно,

$$\Gamma_{\max} = \frac{1 + \sqrt{1 - 4F/L}}{1 - \sqrt{1 - 4F/L}} = 4.$$

## ОЛИМПИАДА «ПОКОРИ ВОРОБЬЕВЫ ГОРЫ!»

### МАТЕМАТИКА

Отборочный этап

**Ноябрь 2013 года**

1. 12.

Пусть  $ABC$  – исходный треугольник,  $D, E$  – точки пересечения прямой, параллельной стороне  $AC$ , со сторонами  $AB$  и  $BC$  соответственно и  $F$  – точка на стороне  $AC$ . Высоту в треугольнике  $DBE$ , проведенную из точки  $B$  на сторону  $DE$ , обозначим через  $h_1$ , а высоту в треугольнике  $FDE$ , проведенную из точки  $F$  на сторону  $DE$ , обозначим через  $h_2$ . Из условия следует подобие треугольников  $ABC$  и  $DBE$ ; пусть коэффициент подо-

бия равен  $k$ , так что  $k = \sqrt{\frac{S_{DBE}}{S_{ABC}}}$ . Тогда

$$k = \frac{h_1}{h_1 + h_2} \Leftrightarrow \frac{h_2}{h_1} = \frac{1-k}{k} \Leftrightarrow \frac{S_{FDE}}{S_{DBE}} = \frac{h_2}{h_1} = \frac{1-k}{k}.$$

Следовательно, искомая площадь равна

$$\begin{aligned} S_{FDBE} &= S_{DBE} + S_{FDE} = \\ &= \left(1 + \frac{1-k}{k}\right) \cdot S_{DBE} = \frac{1}{k} \cdot S_{DBE} = \sqrt{S_{DBE} \cdot S_{ABC}} = 12. \end{aligned}$$

## 2. 8.

Непосредственное вычисление показывает, что данное выражение равно  $x + y$ .

## 3. 1120 способами.

Вратаря тренер может выбрать  $C_2^1$  способами, двух защитников –  $C_5^2$  способами, а трех нападающих –  $C_8^3$  способами. Всего получим  $C_2^1 \cdot C_5^2 \cdot C_8^3 = 1120$  способов.

## 4. 4.

Если  $1 - a^2 = 0$ , то уравнение является линейным и непосредственная проверка показывает, что в каждом случае уравнение имеет единственный корень. Если же  $1 - a^2 \neq 0$ , то уравнение является квадратным и единственным решением будет при условии, что дискриминант равен нулю:

$$D = a^2 - 4(1 - a^2) = 5a^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow a = \pm 2/\sqrt{5}.$$

## 5. В 3 раза.

Если  $x$  – начальный вес продукта, то  $0,99x$  – масса содержащейся в нем воды, а  $0,01x$  – масса сухого вещества. Тогда если после высушивания масса продукта стала равна  $y$  ( $y < x$ ), то масса сухого вещества в нем не изменится:  $0,03y = 0,01x$ . Следовательно,  $x = 3y$ .

## 6. 7 корней.

Заметим, что выполнено равенство  $\frac{3 \sin x - 2}{2 \sin x - 1} + \frac{1 - \sin x}{2 \sin x - 1} = 1$ .

Поэтому если положить  $t = 3^{(3 \sin x - 2)/(2 \sin x - 1)}$ , то исходное уравнение переписывается в виде  $t^2 - 2t - 3 = 0$ .

Подходит лишь корень  $t = 3$ , т.е.  $\frac{3 \sin x - 2}{2 \sin x - 1} = 1 \Leftrightarrow \sin x = 1$ .

Следовательно,  $x = \pi/2 + 2\pi n$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ . Указанному отрезку принадлежит ровно семь чисел этой серии.

**7. 1.**

Пусть  $O$  – центр построенной окружности ( $AO = OC$ ). Углы  $DAH$  и  $BOC$  равны, так как угол  $DAC$  вписан в окружность и опирается на дугу  $CD$ , а  $BO$  – биссектриса центрального угла  $DOC$ , опирающегося на ту же дугу. Тогда из подобия  $\triangle AEH \sim \triangle ABC$ :  $\frac{EH}{BC} = \frac{AH}{AC}$ , а из подобия  $\triangle ADH \sim \triangle OBC$ :  $\frac{DH}{BC} = \frac{AH}{OC}$ . Разделив эти равенства почленно, получим  $EH : DH = OC : AC = 1 : 2$ .

**8. 33.**

Используя нетрудно доказываемое тождество

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 (\alpha + \beta) - 2 \cos \alpha \cos \beta \cos (\alpha + \beta) = \sin^2 \beta,$$

преобразуем исходное уравнение к виду  $\sin^2 2x = \sin^2 4x$ , откуда  $x = \pi n/6, n \in \mathbb{Z}$ . На отрезке  $[\pi; 2\pi]$  содержится ровно семь корней; их сумма равна  $\frac{21\pi}{2}$ .

**9. 2100 руб.**

Пусть первая, вторая и третья сестры продали утром  $x, y$  и  $z$  цыплят соответственно ( $x, y, z \in \mathbb{N}$ ). Пусть также  $a$  и  $b$  – утренняя и вечерняя цены одного цыпленка соответственно ( $a > b > 0$ ). Так как дневная выручка (за утро и вечер) у всех сестер одинакова и равна 1700 рублей, имеем систему равенств

$$\begin{cases} ax + b(12 - x) = 1700, \\ ay + b(18 - y) = 1700, \\ az + b(32 - z) = 1700, \end{cases}$$

откуда получим

$$(a - b)(x - y) = 6b, \text{ и } (a - b)(y - z) = 14b.$$

Поделим первое уравнение на второе:  $(x - y)/(y - z) = 3/7$ , т.е.  $x - y = 3k$ ,  $y - z = 7k$ , где  $k$  – некоторое натуральное число. Значит,  $x - z = 10k$ . В силу того, что  $x < 12$ , из последнего соотношения найдем  $x = 11, z = 1$ , а тогда  $y = 8$ . Подстановка найденных значений  $x, y, z$  в первые два уравнения системы дает соотношения  $11a + b = 1700, 8a + 10b = 1700$ , откуда  $a = 150, b = 50$ . Тем самым общая вечерняя выручка равна  $b(12 - x) + b(18 - y) + b(32 - z) = 42b = 2100$ .

**10. 4052169.**

Докажем вспомогательное неравенство, справедливое для



любых  $a, b, c > 0$ :

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}.$$

Здесь равенство достигается тогда и только тогда, когда  $a = b = c$ .

Действительно, положим  $u = a + b$ ,  $v = a + c$ ,  $w = b + c$ . Тогда  $u, v, w > 0$  и  $2a = u + v - w$ ,  $2b = u - v + w$ ,  $2c = -u + v + w$ . В новых переменных неравенство приобретет вид

$$\begin{aligned} \frac{u+v-w}{w} + \frac{u-v+w}{v} + \frac{-u+v+w}{u} &\geq 3 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \left(\frac{u}{w} + \frac{w}{u}\right) + \left(\frac{u}{v} + \frac{v}{u}\right) + \left(\frac{v}{w} + \frac{w}{v}\right) &\geq 6, \end{aligned}$$

что и доказывает требуемое.

Если в доказанное вспомогательное неравенство подставить  $b = x^3$ ,  $c = 2013^{4/3}x$ , то полученное неравенство совпадет с приведенным в условии задачи – лишь знак  $\leq$  заменится на  $\geq$ . Поэтому должно быть выполнено соотношение  $a = x^3 = 2013^{4/3}x$ , откуда найдем  $x = 2013^{2/3}$ ,  $a = 2013^2 = 4052169$ .

#### Декабрь 2013 года

##### 1. $-1/6$ .

Решение уравнения составляют серии  $x = n, n \in \mathbb{Z}$  и  $x = \pm \frac{1}{6} + 2k, k \in \mathbb{Z}$ .

##### 2. На 21% больше.

Пусть производительность ученика равна  $a$  деталей в час, мастера –  $b$  деталей в час, дневная смена ученика длится  $n$  часов, а мастера –  $m$  часов. Тогда из условия следует, что  $m = 1,1n$  и  $ma = nb$ , т.е.  $b = 1,1a$ . В день мастер делает на  $bm - an = 0,1 \cdot 2,1 \cdot an$  деталей больше, чем ученик, что в процентах от дневной выработки ученика составляет 21%.

##### 3. 231.

Для двузначного числа  $\overline{ab}$  условие означает, что  $a^2 + b^2 - ab = 37$ . Это можно записать в виде  $(2a - b)^2 + 3b^2 = 148$ . Тогда  $b \leq 7$  и прямой перебор вариантов оставляет только три варианта:  $b = 3$ ,  $b = 4$ ,  $b = 7$ . Теперь легко найти, что искомыми числами являются 37, 47, 73, 74.

##### 4. 15.

Обозначим через  $a = 3$  и  $b = 23$  длины оснований трапеции. Если  $c$  – длина отрезка, параллельного основаниям, а  $h_1$  и  $h_2$  – части высоты трапеции, примыкающие к основаниям  $a$  и  $b$

соответственно, то, приравнявая площади, получим

$$\begin{aligned} \frac{a+c}{2} h_1 &= \frac{c+b}{2} h_2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{a+b}{2} (h_1 + h_2) \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{b+c}{a+c} = \frac{h_1}{h_2}, \\ \frac{2(b+c)}{a+b} = 1 + \frac{h_1}{h_2} \end{cases} \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{2(b+c)}{a+b} &= \frac{a+b+2c}{a+c} \Rightarrow 2c^2 = a^2 + b^2. \end{aligned}$$

Поэтому

$$c = \sqrt{(a^2 + b^2)/2}.$$

5. -9.

Положим  $a = \log_2 3$ . Тогда задача равносильна нахождению суммы целочисленных решений неравенства

$$x^2 + 2\left(a - \frac{1}{a}\right)x - 4\left(a + \frac{1}{a} + 2\right) \leq 0.$$

Учитывая, что  $a \in \left(\frac{3}{2}; 2\right)$ , получим  $x \in \left[-2a - 2; \frac{2}{a} + 2\right]$ . Так как  $-6 < -2a - 2 < -5$ ,  $3 < \frac{2}{a} + 2 < 4$ , то решениями будут целые числа от -5 до 3.

6. 861 способ.

Клад состоит из  $n = 70$  монет и каждому пирату должно достаться не менее  $k = 10$  монет. Выдадим каждому пирату по  $k - 1$  монет, а оставшиеся  $n - 3k + 3$  монеты выложим в ряд. Чтобы разделить оставшиеся монеты между пиратами, достаточно расположить на  $n - 3k + 2$  местах между монетами два разделителя. Джо получит монеты левее первого разделителя, Билл - монеты между двумя разделителями, а Том - монеты правее второго разделителя. Число способов расположить эти два разделителя равно  $C_{n-3k+2}^2 = \frac{(n-3k+2)(n-3k+1)}{2}$ . Если  $n = 70$ ,  $k = 10$ , то получится  $C_{42}^2 = 861$  способ.

7. 3021.

Пусть  $A = \underbrace{11\dots1}_{1007}$ . Тогда

$$\begin{aligned} \sqrt{\underbrace{111\dots11}_{2014} - \underbrace{22\dots2}_{1007}} &= \sqrt{A \cdot 10^{1007} + A - 2A} = \\ &= \sqrt{A(9A + 1) - A} = 3A = \underbrace{33\dots3}_{1007}. \end{aligned}$$

8. 2.

Пусть  $y = \left(\frac{2x}{7} - \frac{7}{8x}\right)^2$ , тогда  $\left(\frac{2x}{7} + \frac{7}{8x}\right)^2 = y + 1$  и уравнение примет вид  $\arctg(y + 1) - \arctg y = \frac{\pi}{4}$ . Так как

$$0 \leq \arctg y < \arctg(y + 1) < \frac{\pi}{2},$$

то последнее уравнение равносильно

$$\operatorname{tg}(\arctg(y + 1) - \arctg y) = 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{1 + (y + 1)y} = 1 \Leftrightarrow y = 0 \Leftrightarrow \frac{2x}{7} = \frac{7}{8x} \Leftrightarrow |x| = \frac{7}{4}.$$

9. 88.

Поскольку отрезок  $SD$  перпендикулярен двум медианам треугольника  $ABC$ , то он перпендикулярен плоскости  $ABC$  (рис. 25). В силу теоремы о трех перпендикулярах отсюда следует, что  $DB \perp AB$ .

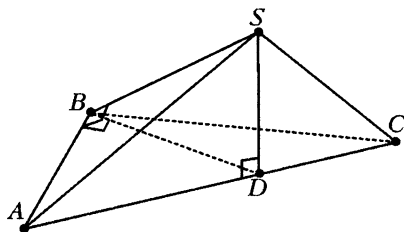


Рис. 25

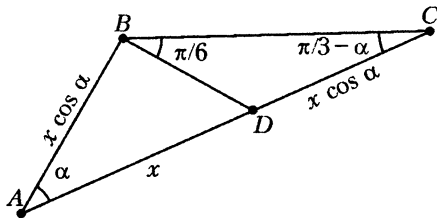


Рис. 26

Пусть  $\alpha = \angle BAC$ ,  $x = AD$ . Тогда, применяя теорему синусов в треугольнике  $ABC$  (рис. 26), имеем

$$\frac{x \cos \alpha}{\sin(\pi/3 - \alpha)} = \frac{x + x \cos \alpha}{\sin(2\pi/3)} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sin \alpha = \frac{\sqrt{3} \cos^2 \alpha}{1 + \cos \alpha} \Leftrightarrow (1 - \cos^2 \alpha)(1 + \cos \alpha)^2 = 3 \cos^4 \alpha \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4 \cos^4 \alpha + 2 \cos^3 \alpha - 2 \cos \alpha - 1 = 0 \Leftrightarrow (\cos 2\alpha + 1)(2 \cos^3 \alpha - 1) = 0.$$

Так как  $\alpha < \pi/2$ , то из последнего уравнения  $\cos \alpha = 1/\sqrt[3]{2}$ . Следовательно,  $AD = AB/\cos \alpha = 88$ .

**10. 60013.**

Функция  $f(x) = 2008 - x^3 - 4x - a + \sin \pi x$  монотонно убывает на всей числовой прямой (в чем можно убедиться, например, вычислив  $f'(x)$ ). Поэтому уравнение из условия равносильно тому, что  $f(x) = x$ . Функция  $g(x) = x - f(x)$  является монотонно возрастающей. Следовательно, уравнение  $g(x) = 0$  имеет единственное решение на отрезке  $[99; 101]$  тогда и только тогда, когда выполнены условия

$$\begin{cases} g(101) \geq 0, \\ g(99) \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 101 - 2008 + 101^3 + 404 + a \geq 0, \\ 99 - 2008 + 99^3 + 396 + a \leq 0. \end{cases}$$

Из полученных неравенств на  $a$  следует, что количество целых значений  $a$  равно

$$g(101) - g(99) + 1 = 2 + 101^3 - 99^3 + 404 - 396 + 1 = 60013.$$

**Январь 2014 года****1. 20 м/с.**

Обозначим скорость поезда (в метрах в секунду) через  $y$ , а длину поезда (в метрах) через  $l$ . Если  $t_1$  и  $t_2$  — времена прохождения поезда мимо Пети и через мост длиной  $a$  соответственно, то

$$\begin{cases} l = vt_1, \\ a + l = vt_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v = a/(t_2 - t_1), \\ l = at_1/(t_2 - t_1). \end{cases}$$

Поскольку  $t_1 = 25$ ,  $t_2 = 28$  и  $a = 60$ , то  $v = 20$ .

**2. 4052169.**

Подставим в данное равенство значения  $x = y = 0$ , получим  $f(0) = 2f(0) + 0$ , откуда  $f(0) = 0$ . Подставим теперь  $x = y$ . Тогда  $0 = f(0) = f(x) + f(x) - 2x^2$ , т.е.  $f(x) = x^2$ .

**3. 503.**

Так как

$$\begin{aligned} \frac{1}{1 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 9} + \frac{1}{9 \cdot 13} + \dots + \frac{1}{2009 \cdot 2013} &= \\ &= \frac{1}{4} \cdot \left( \frac{1}{1} - \frac{1}{5} + \frac{1}{5} - \frac{1}{9} + \frac{1}{9} - \dots + \frac{1}{2009} - \frac{1}{2013} \right) = \\ &= \frac{1}{4} \cdot \left( 1 - \frac{1}{2013} \right) = \frac{1}{4} \cdot \frac{2012}{2013}, \end{aligned}$$

то искомая сумма равна

$$\frac{2012 \cdot 2014}{4 \cdot 2013} = 503 \frac{503}{2013} = 503,2\dots$$

4. 4.

Пусть  $\alpha = \angle CAB$ ,  $\beta = \angle CBA$ ,  $h_A$  – расстояние от точки  $C$  до стороны угла, проходящей через точку  $A$ ,  $h_B$  – расстояние от точки  $C$  до стороны угла, проходящей через точку  $B$ ,  $h$  – расстояние от точки  $C$  до прямой  $AB$ . Тогда

$$h = AC \sin \alpha = h_A \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} \quad \text{и} \quad h = BC \sin \beta = h_B \frac{\sin \beta}{\sin \alpha} . \quad \text{Значит,}$$

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \sqrt{\frac{h_B}{h_A}} \quad \text{и} \quad h = h_A \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \sqrt{h_A h_B} .$$

5. 3.

В результате замены  $v = \sqrt{3x - 7}$ ,  $u = \sqrt{3x^2 - 13x + 13}$  получим равносильное неравенство  $u \leq v$ . Следовательно,  $x$  удовлетворяет неравенству  $3x^2 - 13x + 13 \leq 3x - 7 \Leftrightarrow 2 \leq x \leq 10/3$ . Из двух целых значений  $x = 2$  и  $x = 3$  в область допустимых значений попадает только  $x = 3$ .

6. 486 способов.

Комиссию из восьми человек можно выбрать  $C_{12}^8$  способами. Из них комиссий, в которых нет ни одного математика, будет  $C_9^8$ . Следовательно, искомое число вариантов равно  $C_{12}^8 - C_9^8 = 486$ .

7. 10917708.

Цифра 8 в частном дает промежуточное двузначное произведение, следовательно, делитель не может быть больше 12 ( $13 \cdot 8 = 104$  – не трехзначное число). С другой стороны, промежуточному трехзначному произведению может отвечать в частном только цифра 9 (цифра 8 по условию дает только двузначное произведение), а в этом случае делитель не может быть меньше 12 ( $11 \cdot 9 = 99$  – двузначное число). Следовательно, делителем может быть только число 12. Если при промежуточном делении происходит снос разряда, то в частном на соответствующем месте стоит 0.

Поэтому в частном стоит число 909809, а делимое равно  $12 \cdot 909809 = 10917708$ .

8.  $7/2$ .

Домножим обе части получающегося уравнения на  $\sin \pi x$  (числа  $x = n$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ , из ответа нужно будет убрать, так как они не являются корнями исходного уравнения). Далее, используя

равенство  $8 \sin \pi x \cos \pi x \cos 2\pi x \cos 4\pi x = \sin 8\pi x$ , имеем

$$\begin{aligned} \sin 8\pi x \cos 2\pi x &= \sin \pi x \cos 9\pi x \Leftrightarrow \sin 10\pi x + \sin 6\pi x = \\ &= \sin 10\pi x - \sin 8\pi x \Leftrightarrow \sin 6\pi x = \sin(-8\pi x). \end{aligned}$$

Откуда  $x = k/7$  либо  $x = 1/2 + l$ ,  $k, l \in \mathbb{Z}$ . На отрезке  $[0; 1]$  расположены корни  $1/7$ ,  $2/7$ ,  $3/7$ ,  $4/7$ ,  $5/7$ ,  $6/7$  и  $1/2$ .

9.  $8/5$ .

Область допустимых значений:  $x \in \mathbb{R} \setminus \{\pi/2 + \pi n \mid n \geq 1\}$ . С учетом этого решаем уравнение

$$\arcsin(\sin x) + 2 \arccos(\cos x) = ax - 2\pi a.$$

Функция  $f(x) = \arcsin(\sin x) + 2 \arccos(\cos x)$  – периодическая с периодом  $2\pi$ , причем она является линейной на каждом из промежутков  $[0; \pi/2]$ ,  $[\pi/2; \pi]$ ,  $[\pi; 3\pi/2]$ ,  $[3\pi/2; 2\pi]$ . Поскольку  $f(0) = f(2\pi) = 0$ ,  $f(\pi/2) = 3\pi/2$ ,  $f(\pi) = \pi$ ,  $f(3\pi/2) = \pi/2$ , то график этой функции на всей числовой прямой выглядит так, как показано на рисунке 27. График функции  $y = a(x - 2\pi)$  – это

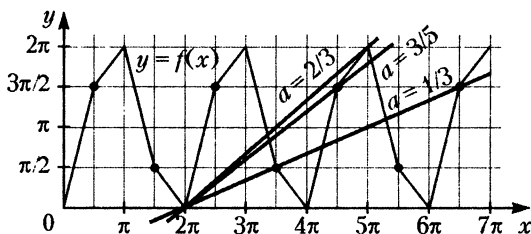


Рис. 27

прямая из семейства прямых, проходящих через точку с координатами  $(2\pi, 0)$ . Выбираем те прямые, которые дают три решения из указанного множества допустимых значений  $x$  и получаем  $a = 1/3$ ,  $a = 2/3$ ,  $a = 3/5$ .

10. 2028.

Из свойств трапеции следует, что треугольники, заштрихованные на рисунке 28 одинаково, имеют одинаковую площадь. Отсюда вытекает равенство сумм площадей, заштрихованных одинаково на рисунке 29:

$$S_{ABR_1} + S_{R_2P_2R_3Q_2} + S_{CDR_4} = S_{R_1P_1R_2Q_1} + S_{R_3P_3R_4Q_3}.$$

Откуда

$$V_{SABR_1} + V_{SR_2P_2R_3Q_2} + V_{SCDR_4} = V_{SR_1P_1R_2Q_1} + V_{SR_3P_3R_4Q_3} = 78.$$

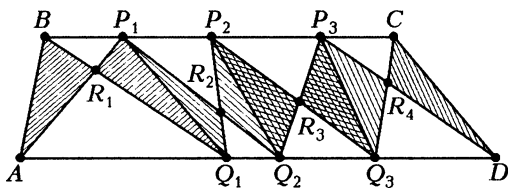


Рис. 28

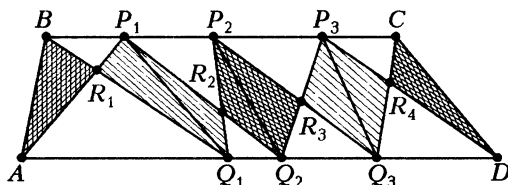


Рис. 29

Положим  $a_1 = V_{SABR_1}$ ,  $a_2 = V_{SR_2P_2R_3Q_2}$ ,  $a_3 = V_{SCDR_4}$ . Из условия задачи  $a_1 + a_2 + a_3 = 78$  и требуется найти минимальное значение  $a_1^2 + a_2^2 + a_3^2$  при условии, что  $a_1$ ,  $a_2$ ,  $a_3$  неотрицательны. Используем известное неравенство между средними:

$$\left( \frac{a_1 + a_2 + a_3}{3} \right)^2 \leq \frac{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}{3}.$$

Получим  $a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 \geq \frac{(a_1 + a_2 + a_3)^2}{3} = 2028$ . Равенство достигается, если  $a_1 = a_2 = a_3 = 26$ .

*Заключительный этап*

1. 1988 и 2006.

Если какой-то из братьев родился в  $\overline{19xy}$  году, то по условию получим уравнение  $1900 + 10x + y + (1 + 9 + x + y) = 2014$ , что равносильно  $11x + 2y = 104$ . Поскольку  $x$  и  $y$  — цифры, то решение этого уравнения единственное:  $x = 8$ ,  $y = 8$ . Если же кто-то из братьев родился в  $\overline{20xy}$  году, то аналогично получим уравнение  $11x + 2y = 12$ , откуда  $x = 0$ ,  $y = 6$ .

2.  $x = 18$ ,  $y = 18$ .

Исходное уравнение равносильно уравнению  $(3x - 1)(y + 1) = 1007$ . Остается заметить, что  $1007 = 19 \cdot 53$ , и решить это уравнение перебором.

3. 1.

Представим  $k$  в виде  $k = 10a + b$ , где  $a$  и  $b$  — целые числа и  $1 \leq b \leq 9$ . Тогда  $k^2 + 6k = 10(10a^2 + 2ab + 6a) + b^2 + 6b$ . Выражение  $b^2 + 6b$  оканчивается на 6 только, если  $b = 2$ . Но в этом

случае  $k^2 + 6k = 100(a^2 + a) + 16$ , а значит, предпоследняя цифра равна 1.

4. В  $73/40$  раз.

Исходная дробь (как сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии) равна  $24/99$ . После замены цифры полу-

чилось число  $\frac{24}{99} + \frac{2}{10} = \frac{438}{99 \cdot 10}$ . Следовательно, искомое отношение равно  $\frac{438 \cdot 99}{99 \cdot 10 \cdot 24} = \frac{73}{40}$ .

5. Нет.

Из условия следует, что четных чисел не меньше, чем 1915, а нечетных чисел не меньше, чем 99. Но всего чисел 2014, поэтому четных чисел ровно 1915, нечетных чисел – ровно 99. Тогда их сумма – нечетное число, т.е. она не может равняться  $2014 \cdot 2013$ .

6. 0,  $1/20$ .

Пусть  $a_2 = 0$ . Тогда последовательность состоит только из нулей, в том числе и  $a_{2014} = 0$ .

Если же  $a_2 \neq 0$ , то легко убедиться, что последовательность будет периодической с периодом 6: в ней будут повторяться числа  $20, a_2, a_2/20, 1/20, 1/a_2, 20/a_2$ . Так как  $2014 = 6 \cdot 335 + 4$ , то  $a_{2014} = a_4 = 1/20$ .

7. 42 кг и 48 кг.

Пусть в начале похода вес рюкзака первого туриста  $x$ , а второго –  $y$ . Тогда условие равносильно системе

$$\begin{cases} x \cdot \frac{17}{20} + y \cdot \frac{9}{10} = (x + y) \cdot \frac{263}{300}, \\ 1,2 + x = 0,9 \cdot y, \end{cases}$$

которую несложно решить.

8. 45.

Девочек было  $d = 3k + n + 1$ , а мальчиков –  $m = k + 2n + 1$ . Здесь  $k$  и  $n$  – количества четырех- и трехместных столов соответственно. Из условия задачи получаем уравнение в целых числах  $3k + n + 1 = \frac{3}{2}(k + 2n + 1)$ , равносильное уравнению  $3k = 4n + 1$ , решение которого имеет вид

$$n = 3l + 2, k = 4l + 3, \text{ где } l \in \mathbb{N}.$$

Тогда общее число туристов равно

$$d + m = 3(4l + 3) + (3l + 2) + (4l + 3) + 2(3l + 2) + 1 = 25l + 20.$$

Туристов было не более 50, поэтому  $l = 1$ , а школьников было 45.



$$9. x \in (-\infty; 7/5] \cup [2; 3] \cup \{9\}.$$

Данное неравенство равносильно преобразуется так:

$$\begin{aligned} \sqrt{9-x} (|x^2 - 10x + 13| - |x^2 - 1|) &\geq \\ \geq 0 &\Leftrightarrow \sqrt{9-x} (x^2 - 10x + 13 - x^2 + 1) (x^2 - 10x + 13 + x^2 - 1) \geq 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \sqrt{9-x} (x - 7/5) (x - 2) (x - 3) \leq 0. \end{aligned}$$

$$10. x \in (1; 2) \cup (5; +\infty).$$

Решаем неравенство на ОДЗ  $x > 1$ . Применив тождество  $a^{\log_b c} = c^{\log_b a}$ , получаем

$$\begin{aligned} (\log_2 x)^{\log_3 \log_5 x} > 1 &\Leftrightarrow (\log_2 x - 1) \log_3 \log_5 x > 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (x - 2)(\log_5 x - 1) > 0 \Leftrightarrow (x - 2)(x - 5) > 0. \end{aligned}$$

$$11. x = 2\pi k/7, \quad x = \left( \pm \arccos \left( \frac{(\sqrt{3} - 1)/2}{2} \right) + 2\pi l \right) / 7, \quad k, l \in \mathbb{Z}.$$

Учитывая равенство  $2 \cos 9x \cos 2x = \cos 11x + \cos 7x$ , перейдем к равносильному уравнению  $2 \cos^3 7x - 3 \cos 7x + 1 = 0$ . Сделав замену  $t = \cos 7x$ , получим уравнение  $2t^3 - 3t + 1 = 0$ , которое имеет корень  $t_1 = 1$ . Делением в столбик находим  $2t^3 - 3t + 1 = (t - 1)(2t^2 + 2t - 1)$ . Корнями квадратного сомножителя являются  $t_{2,3} = \frac{-1 \pm \sqrt{3}}{2}$ . Корень  $t_3 = \frac{-1 - \sqrt{3}}{2} < -1$ , а потому не подходит.

$$12. x = \pi + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Так как  $|\sin t| \leq 1$ ,  $|\cos t| \leq 1$ , то косинус и синусы в левой части должны быть равны  $\pm 1$ . Рассмотрим два случая.

1)  $\cos(2014x) = 1 \Rightarrow x = \frac{\pi n}{1007}, n \in \mathbb{Z}$ . Тогда  $\frac{2013x}{2} = \pi n - \frac{x}{2}$ ,  $\frac{2015x}{2} = \pi n + \frac{x}{2}$  и исходное уравнение сводится к уравнению  $\sin^2 \frac{x}{2} = 1$ , т.е.  $x = \pi + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$ . Получим  $\frac{\pi n}{1007} = \pi + 2\pi k \Leftrightarrow n = 1007(2k + 1)$ , а это число целое при любых  $k \in \mathbb{Z}$ , поэтому все такие  $n$  подходят.

$$2) \quad \cos(2014x) = -1 \Rightarrow x = \frac{\pi + 2\pi n}{2014}, n \in \mathbb{Z}. \quad \text{Тогда}$$

$\frac{2013x}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi n - \frac{x}{2}, \quad \frac{2015x}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi n + \frac{x}{2}$  и исходное уравнение сводится к  $\cos^2 \frac{x}{2} = 1 \Leftrightarrow x = 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$ . Но уравнение  $4028\pi k = \pi + 2\pi n$  не имеет решений в целых числах, поэтому этот случай не дает решений исходного уравнения.

13.  $9/2$ .

Используя основное свойство биссектрисы, находим  $AB : BC : AC = 4 : 2 : 3$ . Отсюда искомое отношение высоты  $h_a$ , проведенной к стороне  $a$ , к радиусу вписанной окружности  $r$  равно  $\frac{2S/a}{S/p} = \frac{2p}{a} = \frac{2+3+4}{2} = \frac{9}{2}$  (здесь, как обычно,  $S$  и  $p$  — площадь и полупериметр треугольника  $ABC$ ).

14.  $9/\pi$ .

Сумма углов  $ABO$  и  $BAO$  равна  $105^\circ$ , поэтому  $\angle ABC + \angle BAD = 210^\circ$ . Значит, сумма углов  $ABE$  и  $BAE$  равна  $150^\circ$ , т.е.  $\angle BEA = 30^\circ$ . По теореме синусов  $R = AB/(2 \sin 30^\circ) = 3$ . Поэтому площадь круга равна  $9/\pi$ .

15.  $3\sqrt{3}/4$ .

Угол между биссектрисами равен углу при вершине  $C$ , а значит,  $\angle C = 60^\circ$ . Точки  $A_1$  и  $B_1$  лежат на перпендикулярах к сторонам треугольника, опущенным из точки  $O$  — центра описанной окружности. Отсюда следует, что  $\angle A_1OB_1 = 120^\circ$ . По теореме синусов радиус окружности равен  $R = \frac{3}{2 \sin 60^\circ} = \sqrt{3}$ . Тогда площадь искомого треугольника равна  $S = 0,5(\sqrt{3})^2 \sin 120^\circ = \frac{3\sqrt{3}}{4}$ .

16.  $2/5$  или  $11/40$ .

Пусть в прямоугольном треугольнике  $ABC$  окружность касается катета  $AC$  в точке  $P$ , проходит через середину  $L$  катета  $BC$  и через середину  $K$  гипотенузы  $AB = 2x$ , причем  $F$  — вторая точка пересечения окружности и гипотенузы  $AB$ . Пусть  $\alpha = \angle A$ , тогда  $\cos \alpha = 2/\sqrt{5}$  или  $\cos \alpha = 1/\sqrt{5}$ .

Возможны два случая: 1)  $F$  лежит между  $K$  и  $B$ ; 2)  $F$  лежит между  $A$  и  $K$ . Так как  $LK$  — средняя линия, то  $LK = x \cos \alpha$ ,  $PC = \frac{1}{2}x \cos \alpha \Rightarrow AP = \frac{3}{2}x \cos \alpha$ . По теореме о касательной и секущей в соответствующих случаях получим:

$$1) \frac{9}{4}x^2 \cos^2 \alpha = x(x + KF) \Rightarrow KF = \left(\frac{9}{4} \cos^2 \alpha - 1\right)x.$$

Следовательно,  $\cos \alpha > \frac{2}{3}$ , и  $\cos \alpha = 2/\sqrt{5}$ . Тогда

$$\frac{KF}{AB} = \left(\frac{9}{4} \cos^2 \alpha - 1\right) / 2 = \frac{2}{5};$$

$$2) \frac{9}{4} x^2 \cos^2 \alpha = x(x - KF) \Rightarrow KF = \left(1 - \frac{9}{4} \cos^2 \alpha\right) x.$$

Следовательно,  $\cos \alpha < \frac{2}{3}$ , и  $\cos \alpha = 1/\sqrt{5}$ . Тогда

$$\frac{KF}{AB} = \left(1 - \frac{9}{4} \cos^2 \alpha\right) / 2 = \frac{11}{40}.$$

17.  $22\sqrt{3}$ .

Пусть  $CM = x$ ,  $CK = y$ . Треугольники  $ABC$  и  $KMC$  подобны, так как  $\angle CMK = \pi - \angle AMK = \angle ABC$ . Тогда  $AC = y\sqrt{3}$ ,  $BC = x\sqrt{3}$  и площадь треугольника  $ABC$  равна  $\frac{3}{2}xy \sin \angle C$ . Из того, что  $AC \cdot MC$  равно квадрату длины касательной, проведенной из точки  $C$ , получим  $xy\sqrt{3} = 88$ .

По теореме синусов  $\sin \angle ABM = \frac{AB}{4\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ , и так как центр окружности находится внутри треугольника, то  $\angle AMB = 60^\circ$ . Далее,  $\sin \angle MBK = \frac{MK}{4\sqrt{3}} = \frac{1}{2}$ , т.е.  $\angle MBK = 30^\circ$  и  $\angle C = \angle AMB - \angle MBK = 30^\circ$ . Площадь треугольника  $ABC$  равна

$$\frac{1}{2} AC \cdot BC \cdot \sin \angle C = \frac{3xy}{4} = 22\sqrt{3}.$$

18.  $a \in [-4; -2] \cup \{1\} \cup (2013; +\infty)$ .

Исходное уравнение равносильно уравнению

$$(a^2 + 1)(a - 1)(a - 2013)x = (a - 1)(a + 2)(a + 4).$$

19.  $a = 1$ ,  $a = 4$ .

Второе уравнение преобразуется к виду  $(x - 3)^2 + y^2 = 1$ . Поэтому, если пара чисел  $(3 + t_0, y_0)$  является решением системы, то решением будет и пара  $(3 - t_0, y_0)$ . Значит, единственным решением может являться или пара  $(3, 1)$ , или пара  $(3, -1)$ .

Первая пара является решением при  $a = 1$  и  $a = 4$ , вторая – при  $a = 2$  и  $a = 3$ . При  $a = 1$  или  $a = 4$  система приводится к виду

$$\begin{cases} y - 1 = 2(x - 3)^6 + |x - 3|, \\ (x - 3)^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

и имеет ровно одно решение  $(3, 1)$ , так как при  $x \neq 3$  из первого уравнения следует  $y > 1$ , что невозможно. При  $a = 2$  или  $a = 3$

система примет вид

$$\begin{cases} y + 1 = |x - 3|, \\ (x - 3)^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

и имеет три решения:  $(3, -1)$ ,  $(4, 0)$ ,  $(2, 0)$ .

**20.**  $a = 0$ ,  $a = 3$ .

Так как подстановка  $x \mapsto \frac{1}{x}$  не меняет уравнения, то для единственности решения необходимо, чтобы выполнялось  $x = \frac{1}{x} \Leftrightarrow x = \pm 1$ . Выясним, когда каждое из этих значений  $x$  является решением уравнения, и притом – единственным.

1) Если  $x = 1$ , то  $a^2 = 2a \Leftrightarrow a = 0; a = 2$ .

При  $a = 0$  исходное уравнение превращается в  $2^{(x+1)^2/(x^2+1)} = 4$  и имеет единственное решение.

При  $a = 2$  исходное уравнение превращается в  $2^{(x+1)^2/(x^2+1)} = 4 \cos\left(\frac{x^2-1}{2x}\right)$  имеет бесконечно много решений на промежутке  $(0; +\infty)$ . Действительно, график (монотонно убывающей!) функции  $y = \frac{(x+1)^2}{x^2+1}$  расположен в полосе  $1 \leq y \leq 2$ , и следовательно, график функции  $y = 2^{(x+1)^2/(x^2+1)}$  лежит в полосе  $2 \leq y \leq 4$ . В то же время функция  $y = 4 \cos\left(\frac{x^2-1}{2x}\right)$  поочередно принимает значения  $-4$  и  $4$  бесконечное число раз при  $x \rightarrow +\infty$ , так как уравнения  $\frac{x^2-1}{2x} = 2\pi n$  и  $\frac{x^2-1}{2x} = \pi + 2\pi k$  имеют положительные решения при всех  $k, n \in \mathbb{N}$ .

2) Если  $x = -1$ , то  $1 + a^2 - 4 = 2a \Leftrightarrow a = -1; a = 3$ .

При  $a = 3$  исходное уравнение превращается в  $2^{(x+1)^2/(x^2+1)} + 5 = 6 \cos\left(\frac{x^2-1}{2x}\right)$  и имеет единственное решение, так как  $2^{(x+1)^2/(x^2+1)} + 5 \geq 6 \geq 6 \cos\left(\frac{x^2-1}{2x}\right)$  и одновременные равенства возможны лишь при  $x = -1$ .

При  $a = -1$  исходное уравнение превращается в  $2^{(x+1)^2/(x^2+1)} - 3 = -2 \cos\left(\frac{x^2-1}{2x}\right)$  и имеет бесконечно много решений (рассуждения аналогичны рассмотренному выше случаю  $a = 2$ ).

21. При  $a \in \mathbb{Z} : x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ , при нецелых  $a$  решений нет.

Исходное уравнение равносильно уравнению

$$(\sin 7x + \sin 3x)^2 + (\cos 3x + \cos x)^2 + \sin^2 \pi a = 0.$$

22.  $a = \pm \pi/6 + \pi n$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ .

После замены  $t = \cos x$  уравнение принимает вид

$$2t^2 f(a) + \sqrt{2} \cdot t \cdot g(a) + h(a) = 0.$$

Условие задачи означает, что решениями уравнения должны быть числа  $\pm 1/\sqrt{2}$ . Поэтому должны выполняться равенства

$$\begin{cases} f(a) + g(a) + h(a) = 0, \\ f(a) - g(a) + h(a) = 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} g(a) = 0, \\ f(a) + h(a) = 0. \end{cases}$$

Для исходного уравнения имеем

$$\begin{cases} \cos 3a = 0, \\ 3 \operatorname{tg} a = \operatorname{ctg} a. \end{cases}$$

Отсюда нетрудно найти  $a$ .

23.  $\frac{\pi}{8} - \frac{3}{8} \arccos \frac{3}{5}$ .

Вводим вспомогательный угол  $\varphi = \arccos(3/5)$ , тогда

$$\cos(x + 4y) - \cos(x - 4y - \varphi) = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} \cos(x + 4y) = 1, \\ \cos(x - 4y - \varphi) = -1. \end{cases}$$

Следовательно,

$$\begin{cases} x = \frac{\varphi + \pi}{2} + \pi(n + k), \\ y = -\frac{\varphi + \pi}{8} + \frac{\pi(n - k)}{4} \end{cases} \Rightarrow x + y = \frac{3\varphi + \pi}{8} + \frac{\pi}{4}(5n + 3k + 1)$$

для любых целых  $n$  и  $k$ . Отсюда  $|x + y| = \left| \frac{3\varphi + \pi}{8} - \frac{\pi m}{4} \right|$ , где  $m$  — произвольное целое число. Так как  $\pi/4 < \varphi < \pi/3$ , то  $\frac{\pi}{8} < \frac{3\varphi + \pi}{8} < \frac{\pi}{4}$  и поэтому минимум выражения  $|x + y|$  достигается при  $m = 1$ .

24.  $a \in [0; +\infty)$ .

Перепишем уравнение в виде

$$\log_2^2 \left( \frac{2x}{1+x^2} \right) + 2(a-1) \log_2 \left( \frac{2x}{1+x^2} \right) + a^2 - 3a = 0.$$

Замена переменных  $t = \log_2 \left( \frac{2x}{1+x^2} \right)$  приводит к уравнению  $t^2 + 2(a-1)t + a^2 - 3a = 0$ . Определим область изменения  $t$ . В силу того, что функция  $y = \frac{2x}{1+x^2}$  при положительном  $x$  меняется в пределах от нуля до единицы, получается, что  $t$  меняется на промежутке  $t \in (-\infty, 0]$ .

Тогда исходная задача может быть сформулирована в терминах переменной  $t$  следующим образом: найти все значения параметра  $a$ , при которых уравнение  $t^2 + 2(a-1)t + a^2 - 3a = 0$  имеет решения при  $t \in (-\infty, 0]$ .

Это возможно, если корни или разного знака, или хотя бы один из корней равен нулю, или оба корня отрицательны. Первая и вторая ситуации описываются условием  $a(a-3) \leq 0$ , третья – системой неравенств:

$$\begin{cases} (a-1)^2 - a(a-3) = a+1 \geq 0, \\ 1-a \leq 0, \\ a(a-3) > 0. \end{cases}$$

Дальше решение почти очевидно.

**25.**  $y \in (-\infty; -4] \cup [0; +\infty)$ .

Решения первого неравенства на плоскости  $Oxy$  образуют квадрат с вершинами в точках  $(0, 4)$ ,  $(4, 0)$ ,  $(0, -4)$ ,  $(-4, 0)$  без начала координат. Решение у первого неравенства существует, только если  $y \in [-4; 4]$ .

Решения второго неравенства на плоскости  $Oxy$  образуют квадрат с вершинами в точках  $(0, 0)$ ,  $(4, -4)$ ,  $(0, -8)$ ,  $(-4, -4)$  без точки с координатами  $(0, -4)$ . У второго неравенства решение существует только в случае, когда  $y \in [-8; 0]$ .

Следовательно, при  $y \in (-\infty; -4] \cup [0; +\infty)$  ни один  $x$ , являющийся решением первого неравенства, не является решением второго неравенства.

**26. 10.**

Площадь боковой грани  $SAB$ , по условию, не меньше 6. С другой стороны, она равна  $\frac{1}{2} \cdot SA \cdot SB \cdot \sin \angle ASB \leq \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 4 \cdot 1 = 6$ . Следовательно,  $SA = 3$ ,  $SB = 4$ ,  $\sin \angle ASB = 1$ , т.е.  $SA$  перпендикулярно  $SB$ . Аналогично получим, что  $SC = 5$  и  $SC$  перпендикулярно  $SA$  и  $SB$ . Поэтому объем пирамиды равен  $\frac{1}{6} \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 10$ .

$$27. \frac{\pi}{6} (3 + \sqrt{3} + 2\sqrt{2})^3.$$

Центры шаров образуют правильный тетраэдр. Угол  $\alpha$  между высотой и боковым ребром совпадает с углом между высотой и образующей конуса, а также с углом между радиусом упомянутой в условии окружности и радиусом четвертого шара, проведенными в одну точку. Поэтому  $\sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$ ,  $\cos \alpha = \frac{\sqrt{6}}{3}$ .

Пусть  $r$  – радиус окружности в плоскости касания конуса четвертым шаром. Образующая  $l$  собирается из трех частей:

$x_1 = \frac{r}{\sin \alpha}$  (от вершины конуса до точки касания конуса четвертым шаром);  $x_2 = 2R$ , где  $R$  – радиусы шаров (расстояние между двумя точками касания нижнего и верхнего шаров соответственно),  $R = \frac{r}{\cos \alpha}$ , т.е.  $x_2 = \frac{2r}{\cos \alpha}$ ; и  $x_3 = \frac{R}{\operatorname{tg}(\pi/4 - \alpha/2)}$  (расстояние от основания конуса до точки касания нижнего шара), что с учетом формулы для  $R$  дает  $x_3 = \frac{r}{1 - \sin \alpha}$ .

$$\text{Итак, } l = x_1 + x_2 + x_3 = \frac{r\sqrt{3}}{2} (3 + 2\sqrt{2} + \sqrt{3}).$$

Объем конуса  $V$  равен  $\frac{\pi}{3} (l \sin \alpha)^2 \cdot (l \cos \alpha)$ . После упрощений получим  $V = \frac{\pi}{6} (3 + \sqrt{3} + 2\sqrt{2})^3$ .

$$28. \arccos \frac{5\sqrt{3}}{\sqrt{131}}.$$

Примем сторону тетраэдра за 12. Угол будем искать через его косинус, который равен отношению площади  $S_1$  треугольника  $K_1L_1M_1$  (проекция треугольника  $KLM$  на плоскость основания) к площади  $S_2$  самого треугольника  $KLM$  (т.е. сечения). Площадь  $S_1$  проекции определить несложно, так как вершины  $K_1$ ,  $L_1$ ,  $M_1$  делят соответствующие радиусы описанной окружности основания (площадь основания  $S_0 = 36\sqrt{3}$ ) в тех же отношениях, что и соответствующие им точки  $K$ ,  $L$ ,  $M$  делят боковые стороны тетраэдра:

$$S_1 = \frac{1}{3} \cdot S_0 \left( \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} \right) = \frac{5}{24} S_0 = \frac{15\sqrt{3}}{2}.$$

Стороны сечения вычислим по теореме косинусов:  $KL = 7$ ,  $LM = \sqrt{52}$ ,  $MK = 3\sqrt{3}$ . Теперь найдем площадь сечения. Коси-

нус угла  $\alpha$ , лежащего напротив стороны  $KL$ , равен  $\cos \alpha = \frac{5}{\sqrt{156}}$ .

Тогда  $\sin \alpha = \frac{\sqrt{131}}{\sqrt{156}}$ . Для площади сечения получим следующий результат:

$$S_2 = 0,5 \cdot 3\sqrt{3} \cdot \sqrt{52} \frac{\sqrt{131}}{\sqrt{156}} = \frac{3}{2} \sqrt{131}.$$

$$\text{Итак, } \cos \gamma = \frac{S_1}{S_2} = \frac{5\sqrt{3}}{\sqrt{131}}.$$

**29.**  $(0; 32\pi)$ .

Если основание призмы имеет  $n$  общих точек со сферой, то это основание вписано в соответствующую окружность. Тогда второе основание касается сферы в центре основания. Опишем вокруг призмы цилиндр (его объем больше объема призмы) и будем искать возможные значения объема цилиндра.

Пусть радиус сферы равен  $R$ , а высота цилиндра равна  $R + x$ , где  $x \in (-R; R)$ . Тогда радиус цилиндра равен  $\sqrt{R^2 - x^2}$ , а его объем равен  $V = \pi(R^2 - x^2)(R + x)$ . Исследуем эту функцию при  $x \in (-R; R)$ .

Так как

$$V'(x) = -\pi(3x^2 + 2Rx - R^2) = -3\pi(x + R)\left(x - \frac{R}{3}\right),$$

то максимум  $V(x)$  достигается при  $x = R/3$  и равен  $(32/27)\pi R^3$ , минимум стремится к нулю при  $x \rightarrow -R$  (когда высота цилиндра стремится к нулю) и при  $x \rightarrow R$  (когда радиус цилиндра стремится к нулю). Значит, для цилиндра искомое отношение принимает значения из промежутка  $(0; (32/27)\pi R^3]$ .

Поэтому для значений объема призмы получим промежуток  $(0; (32/27)\pi R^3)$  (отношение приближается к значению  $(32/27)\pi R^3$  сколь угодно близко при  $n \rightarrow +\infty$ ).



**ИНСТИТУТ КРИПТОГРАФИИ, СВЯЗИ И ИНФОРМАТИКИ  
АКАДЕМИИ ФСБ РОССИИ**

**МАТЕМАТИКА**

*Межрегиональная олимпиада школьников на базе  
ведомственных образовательных учреждений*

*Вариант 1*

**1. 1007.**

Сгруппируем слагаемые суммы:

$$\begin{aligned} 1 + 2 + \dots + 2012 + 2013 &= \\ &= (1 + 2013) + (2 + 2012) + \dots + (1006 + 1008) + 1007 = \\ &= 2014 + \dots + 2014 + 1007. \end{aligned}$$

Следовательно, убрать нужно число 1007.

**2.** Сгруппируем слагаемые в левой и правой частях – первое и последнее, второе и предпоследнее и т.д.:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \frac{\pi}{64} + \operatorname{tg} \frac{31\pi}{64} &= \frac{\sin \frac{\pi}{2}}{\cos \frac{\pi}{64} \cos \frac{31\pi}{64}} = \frac{1}{\cos \frac{\pi}{64} \sin \frac{\pi}{64}} = \frac{2}{\sin \frac{\pi}{32}}, \\ \operatorname{tg} \frac{3\pi}{64} + \operatorname{tg} \frac{29\pi}{64} &= \frac{\sin \frac{\pi}{2}}{\cos \frac{3\pi}{64} \cos \frac{29\pi}{64}} = \frac{1}{\cos \frac{3\pi}{64} \sin \frac{3\pi}{64}} = \frac{2}{\sin \frac{3\pi}{32}}, \\ \frac{1}{\sin \frac{\pi}{32}} + \frac{1}{\sin \frac{31\pi}{32}} &= \frac{2 \sin \frac{\pi}{2} \cos \frac{15\pi}{32}}{\sin \frac{\pi}{32} \sin \frac{31\pi}{32}} = \frac{2 \cos \frac{15\pi}{32}}{\sin \frac{\pi}{32} \cos \frac{15\pi}{32}} = \frac{2}{\sin \frac{\pi}{32}}, \\ \frac{1}{\sin \frac{3\pi}{32}} + \frac{1}{\sin \frac{29\pi}{32}} &= \frac{2 \sin \frac{\pi}{2} \cos \frac{13\pi}{32}}{\sin \frac{3\pi}{32} \sin \frac{29\pi}{32}} = \frac{2 \cos \frac{13\pi}{32}}{\sin \frac{3\pi}{32} \cos \frac{13\pi}{32}} = \frac{2}{\sin \frac{3\pi}{32}}. \end{aligned}$$

Теперь нетрудно понять, что доказываемое равенство справедливо.

**3.**  $\frac{1}{3\sqrt{3}}.$

По формуле  $\frac{n-2}{n} 180 = \frac{4}{6} 180 = 120$ , где  $n$  – количество

сторон правильного многоугольника, получим величину внутренних углов шестиугольника. Треугольник  $AFE$  – равнобедренный с углом при вершине  $120^\circ$ . Отсюда получим, что  $AE = \sqrt{3}ED$ . Так как угол падения равен углу отражения, то треугольники  $AMN$  и  $MND$  равны и  $AM = MN$ . Следовательно,  $AN = MD = 2EM$ , и тогда  $\operatorname{tg} EAM = \frac{EM}{EA} = \frac{1}{3\sqrt{3}}$ .

4. 11, 61, 39, 89.

Обозначим  $a = 10x + y$  – искомое двузначное число ( $x, y$  – цифры от 0 до 9). Так как последняя цифра числа  $a^{2014}$  равна 1, то последняя цифра  $y$  искомого числа  $a$  может принимать значения 1 или 9. Рассмотрим два случая:

1)  $y = 1$ . Заметим, что  $(10x + 9)^{2014} = A + 2014 \cdot 10x + 1$  и при этом число  $A$  делится нацело на 100. Следовательно, предпоследняя цифра определяется слагаемым  $2014 \cdot 10x$ . Отсюда  $x = 1$  или  $x = 6$ .

2)  $y = 9$ . Заметим, что  $(10x + 9)^{2014} = (10(x + 1) - 1)^{2014} = A - 2014 \cdot 10(x + 1) + 1$  и при этом число  $A$  делится нацело на 100. Следовательно, предпоследняя цифра определяется слагаемым  $-2014 \cdot 10(x + 1)$ . Отсюда  $x = 3$  или  $x = 8$ .

5. -2704130.

Преобразуем

$$\log_2 \left( 1 - \cos \left( \frac{\pi}{3}(i - j) + \frac{\pi}{2} \right) \right) = \log_2 \left( 1 - \sin \left( \frac{\pi}{3}(i - j) \right) \right).$$

Тогда для ячеек на диагонали  $i = j$  и в них стоит  $\log_2 1 = 0$ . Для  $i \neq j$  найдем сумму элементов в симметричных относительно диагонали ячейках:

$$\begin{aligned} \log_2 \left( 1 + \sin \left( \frac{\pi}{3}(i - j) \right) \right) + \log_2 \left( 1 + \sin \left( \frac{\pi}{3}(i - j) \right) \right) &= \\ = \log_2 \left( \left( 1 + \sin \left( \frac{\pi}{3}(i - j) \right) \right) \left( 1 - \sin \left( \frac{\pi}{3}(i - j) \right) \right) \right) &= \\ = \log_2 \left( 1 - \sin^2 \left( \frac{\pi}{3}(i - j) \right) \right) = \log_2 \left( \frac{1 + \cos \left( \frac{2\pi}{3}(i - j) \right)}{2} \right). \end{aligned}$$

Для  $i - j = 3k$ , т.е. 3, 6, 9, 12, ..., 2013, данная сумма равна нулю. Для  $i - j = 3k + 1$ , т.е. 1, 4, 7, 10, ..., 2011, данная сумма

$\log_2 \frac{1}{4} = -2$ . Общее число таких пар ячеек  $2013 + 2010 + 2007 + \dots$

$\dots + 3 = \frac{2016 \cdot 671}{2} = 67368$ . Для  $i - j = 3k + 2$ , т.е. 2, 5, 8, 1, ..., 2012, данная сумма  $\log_2 \frac{1}{4} = -2$ . Общее число таких пар ячеек  $2012 + 2009 + 2006 + \dots + 2 = \frac{2014 \cdot 671}{2} = 675697$ . Сумма всех чисел в таблице равна  $(676368 + 675697) \cdot (-2) = -2704130$ .

# 6. 1007 с.

Диагональ квадрата занимает 2014 клеток и равна 2014 см соответственно. Из прямоугольного треугольника с известными катетами находим отрезок  $AD = XY = 1007$  см. В силу симметрии получаем, что  $MX = YN = \frac{1007}{2}$  см. Следовательно,  $AX = XB = CY = YD = \frac{1007}{2}$ .

Первая точка будет оказываться в точке  $Y$  в следующие моменты времени:

$$\frac{\frac{1007}{2} + 1007 + \frac{1007}{2} + 4028k}{10} = \frac{2014 + 4028k}{10}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Вторая точка будет оказываться в точке  $Y$  в следующие моменты времени:

$$\frac{1007 + \left( \frac{1007}{2} + 2014 + \frac{3}{2} \cdot 1007 \right) n}{13} = \frac{1007 + 4028n}{13}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

$$\frac{1007 + 1007 + 4028n}{13} = \frac{2014 + 4028n}{13}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

В первом случае, приравняв времена и упрощая полученное выражение, получим

$$\frac{2014 + 4028k}{10} = \frac{1007 + 4028n}{13}, \quad 4 = 10n - 13k.$$

Уравнение имеет решение  $n = 3, k = 2$ .

Во втором случае аналогичным образом получим

$$\frac{2014 + 4028k}{10} = \frac{2014 + 4028n}{13}, \quad 3 = 2(13k - 10n).$$

Данное уравнение не имеет решений, так как 3 нечетно.

Очевидно, что для найденной пары  $(n, k) = (3, 2)$  время встречи и будет минимально. Теперь находим время:

$$t = \frac{2014 + 4028 \cdot 2}{10} = 1007.$$

7. Площадь прямоугольников размера  $n \times (n+2)$  равна  $n^2 + 2n = (n+1)^2 - 1$ . Посмотрим, какие остатки могут давать квадраты целых чисел при делении на 12:

$$0^2 = 0, 1^2 = 1, 2^2 = 4, 3^2 = 9, 4^2 = 4, 5^2 = 1,$$

$$6^2 = 0, 7^2 = 1, 8^2 = 4, 9^2 = 9, 10^2 = 4, 11^2 = 1.$$

Таким образом, площади наших прямоугольников могут при делении на 12 давать остатки 0, 3, 8 и 11. Если площадь одного из прямоугольников дает остаток 0, то вырежем его. Если такового нет, то найдутся два прямоугольника, площади которых дают одинаковые остатки. Тогда вырежем фигуру буквой Г, вырезав из большего такого прямоугольника меньший. Очевидно, что его площадь кратна 12.

8. Время загрузки – 13, количество загружавшихся самосвалов – 5.

Обозначим:  $x$  – время загрузки одного самосвала;  $k$  – количество загружавшихся самосвалов;  $S$  – расстояние между  $A$  и  $B$ ;  $v$  – скорость порожнего самосвала;  $t$  – время первой встречи Петрова и Иванова после выезда Петрова из пункта  $A$ ;  $T$  – время второй встречи Петрова и Иванова после выезда Петрова из пункта  $A$ . Из условий задачи следует, что скорость движения груженой машины равна  $bv$ , и тогда верны следующие равенства и неравенства:

• На дорогу из  $A$  в  $A$  через  $B$  Петров потратил  $\frac{S}{bv} + \frac{S}{v}$  минут.

Прибытие в  $A$  Петрова произошло через  $a$  минут после первой встречи. Следовательно,

$$\frac{S}{bv} + \frac{S}{v} = t + a.$$

• Между двумя встречами прошло  $T - t = c$  минут.

• Иванов начал движение из  $A$  через  $(k-1)x$  минут после Петрова и, следовательно, до места первой встречи проехал расстояние  $(t - (k-1)x)bv$ .

• После второго выезда из  $A$  прошло  $T - t - a - x = c - a - x$  минут, и Петров успел проехать до места второй встречи расстояние  $(c - a - x)bv$ . Иванов двигался к  $A$  со скоростью  $v$ , следовательно,

$$\frac{(c - a - x)bv}{v} = (c - a - x)b \in [d; e].$$

• От места первой встречи до  $B$  Иванов на груженом самосва-

ле проехал расстояние  $S - (t - (k-1)x)bv$ , а от  $B$  до места второй встречи на порожном — расстояние  $S - (-a - x)bv$ . Следовательно,

$$\frac{S - (t - (k-1)x)bv}{bv} + \frac{S - (c - a - x)bv}{v} = c.$$

Упрощая данное равенство, получаем, что

$$(k-x)x - (c-a-x)b = c-a.$$

Следовательно, мы получаем, что  $(k-1)x - (c-a-x)b = c-a$ , и при этом  $(c-a-x)b \in [d; e]$ . Путем несложных преобразований получаем, что верна система

$$\begin{cases} (k-1)x \in [c-a+d; c-a+e], \\ x \in \left[ c-a-\frac{e}{b}; c-a-\frac{d}{b} \right], \\ (k-1)x - (c-a-x)b = c-a. \end{cases}$$

В условиях первого варианта ( $a = 6$ ,  $b = 6/7$ ,  $c = 40$ ,  $d = 16$ ,  $e = 19$ ) система приобретает вид

$$\begin{cases} (k-1)x \in [50; 53], \\ x \in [71/6; 92/6], \\ (k-1)x - (34-x)\frac{6}{7} = 34. \end{cases}$$

Перебором находим, что при  $x$  из промежутка  $[71/6; 92/6]$  выражение  $(k-1)x$  может находиться в промежутке от 50 до 53 только при  $k = 5$ . Решая оставшееся уравнение, находим, что  $x = 13$ .

### *Письменный экзамен*

#### *Вариант 1*

**1.** Числа равны между собой.

Найдем разность указанных чисел:

$$\begin{aligned} \log_2^2 45 - \log_2 15 \log_2 135 - \log_2^2 3 = \\ = (\log_2 45 + \log_2 3)(\log_2 45 - \log_2 3) - \log_2 15 \log_2 135 = 0. \end{aligned}$$

**2.**  $x \in \left[ -\frac{1}{2}; 0 \right] \cup [4; +\infty).$

Возведем в квадрат, перенесем в одну часть, разложим по разности квадратов:

$$\begin{aligned}(x^2 - 6x - 1 - (x^2 - 2x + 1))(x^2 - 6x - 1 + (x^2 - 2x + 1)) &\leq 0, \\ (-4x - 2)(2x^2 - 8x) &\leq 0, \quad x\left(x + \frac{1}{2}\right)(x - 4) \geq 0.\end{aligned}$$

Решая методом интервалов, получим

$$x \in \left[-\frac{1}{2}; 0\right] \cup [4; +\infty).$$

3.  $\frac{10}{3}$ .

Обозначим  $MB = x$ . Тогда  $AM = 3x$ ,  $DC = 4x$ . Очевидно, что радиус окружности, вписанной в четырехугольник  $AMCD$ , равен 2. Так как в четырехугольник  $AMCD$  можно вписать окружность, то  $AD + MC = AM + DC$ , откуда

$$4 + \sqrt{16 + x^2} = 7x \Rightarrow x = \frac{7}{6}.$$

Тогда

$$OB = \sqrt{4 + \frac{64}{9}} = \frac{10}{3}.$$

4.  $\frac{3650}{3}$ .

Преобразуем данное уравнение:

$$\log_{\sin \frac{\pi x}{2}} \left( 3 \cos \frac{\pi x}{2} - \cos(\pi x) - 1 \right) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sin \frac{\pi x}{2} > 0, \\ \sin \frac{\pi x}{2} \neq 1, \\ 3 \cos \frac{\pi x}{2} - \cos(\pi x) - 1 = 1. \end{cases}$$

Воспользовавшись формулой  $\cos 2\alpha = 2\cos^2 \alpha - 1$  и решив квадратное уравнение, получим

$$\cos \frac{\pi x}{2} = 1, \quad \cos \frac{\pi x}{2} = \frac{1}{2}.$$

С учетом первого и второго условия,

$$x = \frac{2}{3} + 4n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Найденные числа образуют арифметическую прогрессию. Пользуясь формулой суммы арифметической прогрессии, находим

сумму решений, принадлежащих отрезку  $[0; 100]$ :

$$\frac{2 \cdot \frac{2}{3} + 4 \cdot 24}{2} \cdot 25 = \frac{3650}{3}.$$

5. 3.

Пусть  $x$  и  $y$  – производительности труб,  $r\%$  – концентрация раствора, подаваемого второй трубой. Из условия задачи получаем уравнения

$$5x + ry = 7(x + y), \quad \frac{5+r}{2} = 9,$$

откуда находим

$$\frac{x}{y} = 3.$$

6.  $a \in \left(-\frac{31}{4}; +\infty\right).$

Сделаем замену  $t = x(x+1)$ . Заметим, что  $t \in \left[-\frac{1}{4}; +\infty\right)$ , и уравнение  $x(x+1) = t_0$  имеет два решения (относительно  $x$ ) при  $t_0 > -\frac{1}{4}$ , одно решение при  $t_0 = -\frac{1}{4}$  и не имеет решений при  $t_0 < -\frac{1}{4}$ . Обозначим  $f(t) = t^2 + at - 2$ . Следовательно, исходное уравнение имеет два корня (относительно  $x$ ) тогда и только тогда, когда корни уравнения  $f(t) = 0$  удовлетворяют условию:  $t_1 < -\frac{1}{4} < t_2$ . Последнее равносильно условию  $f\left(-\frac{1}{4}\right) < 0$ . Отсюда  $a \in \left(-\frac{31}{4}; +\infty\right).$

## ФИЗИКА

*Межрегиональная олимпиада школьников на базе  
ведомственных образовательных учреждений*

### Вариант 1

1. Проведем  $OA \perp AB$  и  $OB \perp BC$  (рис.30). Построением находим неподвижную точку  $O$ , относительно которой треугольник  $ABC$  совершает в данный момент вращательное движение (через точку  $O$  проходит «мгновенная ось вращения»). Отсюда

следуют направления векторов  $\vec{v}_A$ ,  $\vec{v}_B$ ,  $\vec{v}_C$ :

$$OB^2 = OA^2 + AB^2,$$

$$OC^2 = OB^2 + BC^2,$$

$$v_A^2 = \omega^2 OA^2,$$

$$v_B^2 = \omega^2 OB^2,$$

$$v_C^2 = \omega^2 OC^2$$

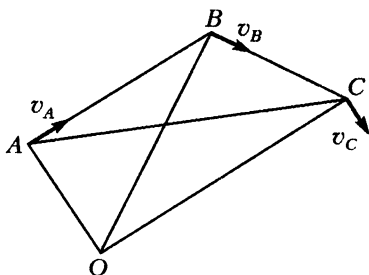


Рис. 30

и величина искомой скорости:

$$v_C = \sqrt{(v_B^2 - v_A^2) \left( \frac{BC}{AB} \right)^2 + v_B^2}.$$

2. Вследствие симметрии системы относительно вертикальной плоскости, проходящей через вершину призмы параллельно оси цилиндра, нет смысла рассматривать всю систему в целом. Достаточно ограничиться одним цилиндром и той половиной призмы (клином), с которой он взаимодействует.

На рисунке 31 показаны силы, действующие на цилиндр со стороны клина и горизонтальной поверхности, и силы, действующие со стороны цилиндра на клин. Условие раскатывания цилиндров означает, что момент сил, вращающих цилиндр против часовой стрелки, должен быть больше или равен моменту сил, вращающих его по часовой стрелке:

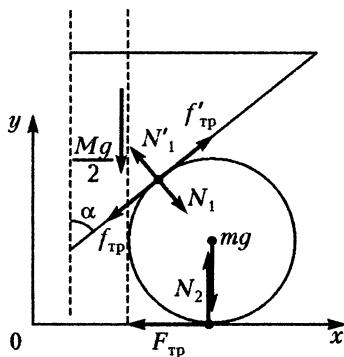


Рис. 31

$$f_{\text{тр}} r \geq F_{\text{тр}} r, \text{ или } f_{\text{тр}} \geq F_{\text{тр}}.$$

Условие отсутствия проскальзывания между призмой и цилиндрами означает, что и для цилиндра и для клина сумма всех действующих сил равна нулю. Проецируя на выбранные оси и принимая во внимание, что  $f_{\text{тр}} = f'_{\text{тр}} = f$  и  $N_1 = N'_1$ , получим

$$N_1 \cos \alpha - f \sin \alpha - F_{\text{тр}} = 0,$$

$$-N_1 \sin \alpha - mg + N_2 - f \cos \alpha = 0,$$

$$-\frac{Mg}{2} + N_1 \sin \alpha + f \cos \alpha = 0.$$



Отсюда, учитывая, что  $F_{\text{тр}} = \mu N_2$ , найдем

$$\frac{M}{m} \geq \frac{2\mu(1 + \sin \alpha)}{\cos \alpha - \mu(1 + \sin \alpha)} = 55.$$

Данная ситуация может осуществиться лишь в том случае, если призма в месте ее соприкосновения с цилиндром не проскальзывает по цилиндру, т.е. если силой, вращающей цилиндр вокруг его оси, является сила трения покоя. Это означает, что

$$f_{\text{тр}} \leq \mu_0 N_1,$$

где  $\mu_0$  – коэффициент трения скольжения между призмой и цилиндром. С другой стороны,

$$f \geq \mu N_2.$$

Следовательно,

$$\mu_0 \geq \mu \frac{N_2}{N_1} = \frac{\cos \alpha}{1 + \sin \alpha} = 0,41.$$

3. При заданных условиях воздух можно считать идеальным газом. Тогда за время  $\Delta t$  из отверстия вылетят в среднем

$$\Delta N = \frac{n S v_{\text{ср}} \Delta t}{6}$$

молекул воздуха, т.е. те молекулы, которые находятся в объеме  $S v_{\text{ср}} \Delta t$  и движутся в направлении отверстия. Концентрацию молекул  $n$  можно выразить через давление  $p$  и температуру  $T$  из уравнения состояния идеального газа:

$$p = nkT,$$

а скорость можно найти из соотношения, связывающего среднюю кинетическую энергию поступательного движения молекулы и абсолютную температуру:

$$\frac{m_0 v_{\text{ср}}^2}{2} = \frac{3}{2} kT,$$

где  $m_0$  – масса молекулы. Тогда

$$\Delta N = \frac{p S \Delta t}{6 k T} \sqrt{\frac{3 k T}{m_0}} = \frac{p S \Delta t N_A}{6} \sqrt{\frac{3}{R T M}},$$

где  $N_A = 6 \cdot 10^{23} \text{ моль}^{-1}$ . Полное число молекул воздуха в корабле  $N$  найдем из уравнения Клайперона–Менделеева:

$$N = n V = \frac{p V}{k T}.$$

Полагая, что скорость утечки воздуха неизменна, а давление

воздуха в корабле, необходимое для жизнеобеспечения космонавтов, не меньше половины атмосферного, время утечки, а следовательно, время, которое есть у космонавтов в запасе, будет равно

$$\tau = \frac{N}{\Delta N / \Delta t} = \frac{3V}{S} \sqrt{\frac{M}{3RT}} \approx 10^4 \text{ ч}.$$

4. При движении электронов за счет кулоновского отталкивания будут уменьшаться составляющие их скоростей, направленные вдоль прямой, соединяющей электроны. При максимальном сближении электронов эти составляющие станут равными нулю. Составляющие скоростей электронов, перпендикулярные этой прямой, меняться в процессе движения не будут. Для вычисления минимального расстояния между электронами воспользуемся законом сохранения энергии:

$$\frac{kq^2}{l} + 2 \frac{mv_0^2}{2} = \frac{kq^2}{r_{\min}} + 2 \frac{mv_0^2 \sin^2 \alpha}{2}.$$

Отсюда получим

$$r_{\min} = \frac{klq^2}{kq^2 + mv_0^2 \sin^2 \alpha} = 3,4 \cdot 10^{-6} \text{ м}.$$

5. Цепь, которая начинается со второго из периодически повторяющихся элементов, подобна исходной. Обозначим ее сопротивление  $r$ . Тогда

$$R_{AB} = \frac{R(R + 2r)}{2R + 3r} = r.$$

Отсюда находим

$$r = \frac{R}{\sqrt{3}} \text{ и } R_{AB} = \frac{R}{\sqrt{3}}.$$

6. Необходимо смочить порошок, например, водой. Поверхность сухого порошка кажется белой потому, что она рассеивает падающий на порошок белый свет во все стороны. Если порошок смочить водой, то поверхность воды будет рассеивать свет только в определенных направлениях, а зерна порошка будут избирательно рассеивать белый свет, придавая рассеянному свету тон самого стекла. При этом насыщенность рассеянного света будет усилена за счет рассеяния его более глубокими слоями порошка.

7. Там, где шип опирается о землю, возникает большое давление, под воздействием которого снег (лед) тает и шип глубоко вгрызается в поверхность. При сильных морозах этого не происходит, и сцепление с дорогой ухудшается. Шины с

мягкой, не твердеющей на морозе резиной плотно прилегают к снежной дороге, обеспечивая достаточно высокое трение.

### Вариант 2

1. Отсутствие проскальзывания означает, что скорости точек  $A$  и  $B$  диска, в которых диск касается реек (рис.32), совпадают со скоростями реек, а скорость центра диска  $O$  направлена в сторону скорости  $v_1$ . Скорость точек  $A$  и  $B$  можно представить в виде векторной суммы скоростей поступательного движения центра диска и скорости вращения вокруг оси, проходящей через центр диска (перпендикулярно плоскости чертежа). Запишем это в проекциях на горизонтальную ось:

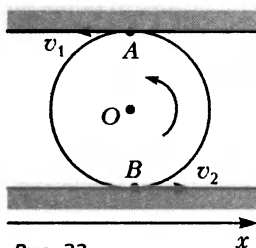


Рис. 32

$$v_1 = v_0 + \omega R,$$

$$v_2 = \omega R - v_0.$$

Отсюда найдем

$$\omega = \frac{v_1 + v_2}{2R}, \quad v_0 = \frac{v_1 - v_2}{2}.$$

2. Если бы цилиндр был однородным, то его состояние на горизонтальной дощечке можно было бы охарактеризовать как состояние неустойчивого равновесия. Малейший наклон дощечки приводил бы к скатыванию цилиндра. Поскольку же цилиндр неоднороден, то до определенного угла наклона дощечки к горизонту его состояние будет устойчивым. Момент силы тяжести, созданный веществом, заполняющим отверстие, будет удерживать цилиндр на дощечке до тех пор, пока его центр тяжести будет находиться на вертикали, проходящей через точку касания цилиндра с дощечкой. Однако если наклон дощечки станет настолько большим, то равновесие цилиндра будет невозможно и он скатится с дощечки. Расстояние от оси цилиндра до его центра тяжести можно найти так:

$$x_{ц.т.} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3}{m_1 + m_2 + m_3} = \frac{(m_2 - m_3)l}{m_1 + m_2 - m_3} = \frac{r^2(n-1)l}{R^2 + r^2(n-1)} = \frac{2}{3}R \frac{n-1}{3(n+15)},$$

где  $m_1$  – масса цилиндра,  $m_2$  – масса наполнителя цилиндрического отверстия,  $m_3$  – масса высверленной части цилиндра,

$n = \frac{\rho_v}{\rho_{ц}}$  – отношение плотностей залитого вещества и вещества

цилиндра. Таким образом, условие, при котором цилиндр не будет скатываться с дощечки, имеет вид

$$\alpha < \alpha_{\min} = \arcsin \frac{x_{\text{н.т.}}}{R} = \arcsin \frac{2}{3} \frac{(n-1)}{(n+15)} = 14,8^\circ.$$

Помимо скатывания с дощечки, цилиндр может соскользнуть с нее. Условие отсутствия скольжения цилиндра можно получить из уравнений динамики

$$\vec{F}_{\text{тр}} + \vec{N} + M\vec{g} = 0,$$

$$F_{\text{тр}} \leq \mu N,$$

или, в проекциях на горизонтальную и вертикальную оси,

$$F_{\text{тр}} = mg \sin \alpha,$$

$$N = mg \cos \alpha,$$

$$F_{\text{тр}} \leq \mu N.$$

Отсюда находим

$$\operatorname{tg} \alpha < \mu, \text{ или } \alpha < \alpha_{\min} = \operatorname{arctg} \mu = 16,7^\circ.$$

Итак, цилиндр начнет раньше скатываться, чем соскальзывать с дощечки.

**3.** Картину движения молекул в сосуде можно представить следующим образом. Молекулы, сталкиваясь со стенками сосуда, приобретают среднюю квадратичную скорость, соответствующую температуре стенок, а вклад проникающих через перегородку молекул пренебрежимо мал. В состоянии равновесия количество молекул в каждой из частей сосуда постоянно. Это становится возможным, если за произвольный промежуток времени  $\Delta t$  через перегородку проникает одинаковое количество молекул в обоих направлениях:

$$\frac{S n_1 v_{1\text{ср.кв}} \Delta t}{6} = \frac{S n_2 v_{2\text{ср.кв}} \Delta t}{6},$$

где  $S$  – площадь поперечного сечения отверстий (пор) в перегородке. Следовательно,

$$n_1 \sqrt{T_1} = n_2 \sqrt{T_2}, \text{ или } \frac{n_1}{n_2} = \sqrt{\frac{T_2}{T_1}} = 2.$$

**4.** Потенциальные энергии системы зарядов в начальном  $W_{\text{н}}$  и конечном  $W_{\text{к}}$  состояниях равны, соответственно,

$$W_{\text{н}} = k \left( \frac{q_1 q_2}{r_1 + r_2} + \frac{q_1 Q}{r_1} + \frac{q_2 Q}{r_2} \right), \quad W_{\text{к}} = k \left( \frac{q_1 q_2}{r_1 + r_2} + \frac{q_1 Q}{r_2} + \frac{q_2 Q}{r_1} \right).$$

Минимальная работа, которую необходимо совершить, чтобы

поменять заряды  $q_1$  и  $q_2$  местами, равна разности потенциальных энергий конечного и начального состояний:

$$A = W_k - W_n = \frac{k(q_1 - q_2)Q(r_1 - r_2)}{r_1 r_2} = 90 \text{ Дж}.$$

5. Цепь, которая начинается со второго из периодически повторяющихся элементов, подобна исходной. Поэтому

$$R_{AB} = R \frac{\sqrt{3} + 1}{2}.$$

6. Показатель преломления воздуха зависит от температуры. Из-за неоднородного распределения температуры в пламени костра лучи света, отразившиеся от разных точек предметов, искривляются по-разному, что приводит к смещению изображений различных точек предметов на сетчатке глаза. Аналогичный эффект можно наблюдать, если в жаркий день смотреть на воздух над разогретым асфальтом.

7. При одинаковых температуре и давлении сухой воздух тяжелее, так как концентрация молекул зависит только от температуры и давления, а не от вида газа (в приближении идеального газа). В сыром воздухе часть молекул азота и кислорода замещена молекулами воды, которые легче, чем молекулы азота или кислорода.

### *Письменный экзамен*

#### *Вариант 1*

1. Чтобы найти модуль средней скорости, надо модуль перемещения, т.е. диаметр окружности, разделить на время движения, т.е. на половину периода:

$$v_{cp} = \frac{|\Delta r|}{\Delta t} = \frac{2R}{T/2} = \frac{2R}{(2\pi R/v)/2} = \frac{2v}{\pi} = 6,4 \text{ м/с}.$$

2. Применим уравнение Менделеева–Клапейрона, в котором учтем, что в смеси газов количество вещества  $\nu$  складывается из количеств вещества компонентов смеси  $\nu_1$  и  $\nu_2$ , а также вспомним выражение, связывающее среднюю квадратичную скорость молекул газа с температурой:

$$pV = (\nu_1 + \nu_2)RT, \quad \nu_2 = \frac{\nu_1}{\beta}, \quad \nu_1 = \frac{m_1}{M_1}, \quad u = \sqrt{\frac{3RT}{M_1}}.$$

Отсюда найдем  $m_1$ :

$$m_1 = \frac{3pV\beta}{u^2(\beta + 1)} = 72 \text{ кг}.$$

3. Запишем соотношения, являющиеся определением емкости для первого и второго конденсатора, пока они не были подключены друг к другу и после подключения, также напомним соотношение для параллельного соединения конденсаторов и учтем, что при параллельном соединении обкладками одного знака заряды складываются:

$$C_1 = \frac{q_1}{U_1}, \quad C_2 = \frac{q_2}{U_2}, \quad C = C_1 + C_2, \quad q = q_1 + q_2, \quad C = \frac{q}{U}.$$

Решив получившуюся систему уравнений, найдем

$$C_1 = C_2 \frac{(U_2 - U)}{(U - U_1)} = 4 \text{ мкФ}.$$

4. Поскольку

$$T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{g}{l_1}}, \quad T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{g}{l_2}}, \quad N_1 T_1 = N_2 T_2,$$

получаем

$$l_1 = \frac{N_1^2}{N_2^2} l_2 = 1 \text{ м}.$$

5. Из рисунка 33 видно, что  $\triangle BOD$  подобен  $\triangle BCE$ , следовательно,

$$\frac{r}{R} = \frac{x}{L-x}, \quad \text{или} \quad \frac{1}{x} = \frac{R+r}{rL}.$$

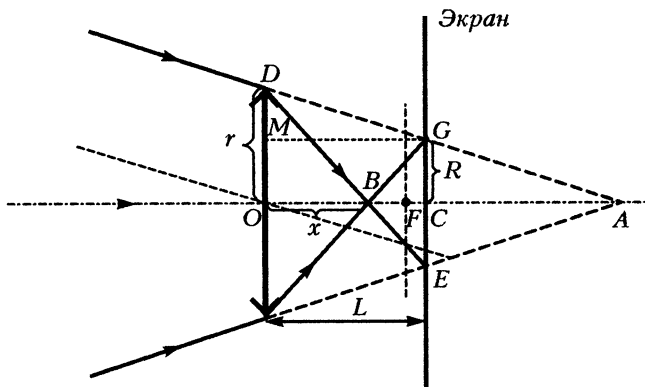


Рис. 33

Аналогично,  $\triangle DMG$  подобен  $\triangle DOA$ , поэтому

$$\frac{r}{OA} = \frac{r-R}{L}, \quad \text{или} \quad \frac{1}{OA} = \frac{r-R}{rL}.$$

По правилам построения изображений в собирающей линзе, если точка  $B$  – предмет, а точка  $A$  – его изображение, то

$$-\frac{1}{OA} + \frac{1}{x} = \frac{1}{F}.$$

Из полученных уравнений получаем

$$F = \frac{rL}{2R} = 17,5 \text{ см}.$$

**XXIII МЕЖРЕГИОНАЛЬНАЯ ОЛИМПИАДА  
ШКОЛЬНИКОВ ПО МАТЕМАТИКЕ И  
КРИПТОГРАФИИ**

1. 4; 30, 32, 35, 36 или 30, 31, 34, 36(с).

2. 7832.

3. Например,  $a = 3$ ,  $b = 6$ ,  $c = 8$ ,  $d = 10$ .

4. При  $n = 65$ ,  $m = 78$ ,  $k = 18$  наименьшее возможное натуральное значение равно 4. Пример таблицы приведен на рисунке 34.

|    |                  |     |                  |                  |     |                  |                  |
|----|------------------|-----|------------------|------------------|-----|------------------|------------------|
| 65 | $\frac{340}{65}$ | ... | $\frac{340}{65}$ | $\frac{476}{65}$ | ... | $\frac{476}{65}$ | $\frac{272}{65}$ |
|    | ...              | ... | ...              | ...              | ... | ...              | ...              |
|    | $\frac{340}{65}$ | ... | $\frac{340}{65}$ | $\frac{476}{65}$ | ... | $\frac{476}{65}$ | $\frac{272}{65}$ |
|    |                  | 78  |                  | 18               |     |                  |                  |

Рис. 34

5. У МЕНЯ ЕСТЬ СЕНОКОСИЛКА.

6. ЗОНДПРИЗЕМЛЕН.

7. ЯШМАЯШМА.

**МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ  
УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Э.БАУМАНА**

ФИЗИКА

Олимпиада-2014

I тур

Вариант 1

1.  $s_{\min} = \sqrt{1,38 \text{ м}^2} \approx 1,17 \text{ м}$  (расстояние минимально в момент времени  $t = \frac{11}{13} \text{ с}$ ).

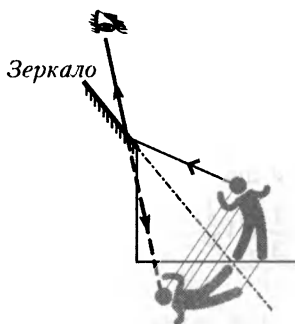


Рис. 35

2. См. рис.35.

3. Из условия начала соскальзывания цепочки найдем макси-

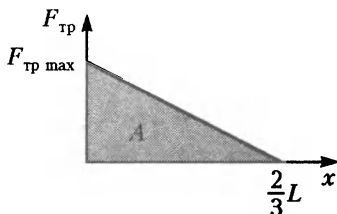


Рис. 36

мальную величину силы трения, действующей на цепочку:

$$F_{\text{тр max}} = \frac{1}{3} mg.$$

При соскальзывании цепочки сила трения изменяется от  $F_{\text{тр max}}$  до нуля (рис.36). Модуль работы силы трения (эта работа отрицательна) равен

$$A = \frac{1}{2} F_{\text{тр max}} \cdot \frac{2}{3} L = \frac{mgL}{9} = 1,3 \text{ Дж}.$$

4.  $t_2 = \frac{2h}{gt_1}$  (в момент взрыва скорости осколков направлены так, как показано на рисунке 37).

5. Так как для изобары  $T$  пропорционально  $V$ , то можно записать

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{V_{2,4}}{V_1} \text{ и } \frac{T_2}{T_1} = \frac{V_3}{V_{2,4}},$$

откуда получим

$$\frac{T_2}{T_1} = \sqrt{\frac{V_3}{V_1}}.$$

Поскольку  $T_2 = T_3$ , то

$$\frac{T_3}{T_1} = \sqrt{\frac{V_3}{V_1}} = \sqrt{2}.$$

6. Внутренняя энергия одноатомного газа равна

$$U = \frac{3}{2} \nu RT = \frac{3}{2} pV = \alpha V^2.$$

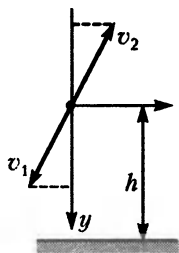


Рис. 37



Уравнение данного процесса перепишем в виде

$$p = \frac{2}{3} \alpha V ,$$

т.е. давление газа линейно зависит от его объема. Работа, совершаемая газом при его расширении, равна площади под прямой, изображающей процесс на  $pV$ -диаграмме:

$$A = \frac{1}{2}(p_1 + p_2)(V_2 - V_1) = \frac{1}{3} \alpha (V_2^2 - V_1^2) .$$

Изменение внутренней энергии равно

$$\Delta U = \alpha (V_2^2 - V_1^2) .$$

Согласно первому закону термодинамики,

$$Q = \Delta U + A = \alpha (V_2^2 - V_1^2) + \frac{1}{3} \alpha (V_2^2 - V_1^2) = \frac{4}{3} \alpha (V_2^2 - V_1^2) ,$$

или

$$\alpha (V_2^2 - V_1^2) = \frac{3}{4} Q .$$

Тогда получим

$$A = \frac{1}{4} Q .$$

7. КПД цепи равен

$$\eta = \frac{IR}{I(R+r)} , \text{ где } R = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} .$$

Отсюда находим

$$\eta = \frac{R_1 R_2}{R_1 R_2 + r(R_1 + R_2)} = 0,74 .$$

8. На обоих резисторах выделяется количество теплоты

$$Q = A - \Delta W ,$$

где

$$A = \Delta q \cdot \varepsilon = (C_{\text{бат}} U_2 - C_{\text{бат}} U_1) \varepsilon = 6CU \varepsilon ,$$

$$\Delta W = W_2 - W_1 = \frac{6CU^2}{2} = 3CU^2 .$$

Так как  $Q = Q_1 + Q_2$  и резисторы соединены параллельно, т.е.

$$\frac{Q_1}{Q_2} = \frac{R_2}{R_1} , \text{ находим}$$

$$Q_1 = Q \frac{R_2}{R_1 + R_2} = 3CU (2\varepsilon - U) \frac{R_2}{R_1 + R_2} .$$

9. По закону электромагнитной индукции Фарадея,

$$\mathcal{E} = |\mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2| = \left| -\frac{\Delta\Phi_1}{\Delta t} + \frac{\Delta\Phi_2}{\Delta t} \right| = \left| (S_2 - S_1) \frac{\Delta B}{\Delta t} \right|.$$

По закону Ома,

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R}.$$

Искомый заряд равен

$$q = I\Delta t = \left| \frac{S_2 - S_1}{R} \Delta B \right| = \frac{(2a^2) - a^2}{R} (B - (-B)) = \frac{6a^2 B}{R}.$$

10. При движении по шероховатой поверхности на брусок действует переменная сила трения

$$F_{\text{тр}} = \mu \frac{mg}{L} x,$$

где  $x$  — длина части бруска, въехавшей на шероховатую поверхность. В соответствии со вторым законом Ньютона уравнение движения бруска имеет вид

$$ma_x = -\mu \frac{mg}{L} x, \text{ или } a_x + \frac{\mu g}{L} x = 0.$$

Движение бруска описывается уравнением колебаний с циклической частотой  $\omega = \sqrt{\frac{\mu g}{L}}$  и амплитудой  $A = \frac{v}{\omega} = v \sqrt{\frac{L}{\mu g}}$ , т.е.

$$x = A \sin \omega t = v \sqrt{\frac{L}{\mu g}} \sin \sqrt{\frac{\mu g}{L}} t.$$

Отсюда найдем искомое время, когда  $x = s$ :

$$\tau = \frac{\pi}{6} \text{ с} \approx 0,52 \text{ с}.$$

*Вариант 2*

1.  $x = 7$  м (скорость равна нулю в момент времени  $t = 1$  с).

2. Условиями равновесия стержня являются равенство нулю суммы всех сил, действующих на стержень, и алгебраической суммы моментов всех этих сил. Запишем второе условие относительно оси  $O$ :

$$-3mg \frac{L}{3} - mg \frac{L}{2} - mgL + T \frac{2L}{3} = 0.$$

Отсюда найдем силу упругости пружины:

$$T = \frac{3}{2} \left( mg + \frac{1}{2} mg + mg \right) = 3 \frac{3}{4} mg.$$

Теперь из первого условия найдем силу реакции в шарнире:

$$N = 3mg + mg + mg - T = \frac{5}{4}mg.$$

3. Брусок массой  $M$  остается неподвижным до тех пор, пока сила упругости  $T$ , действующая на него со стороны нити, не достигнет максимального значения силы трения покоя, т.е.

$$\mu Mg = T.$$

Величина силы упругости нити  $T$  зависит от амплитуды колебаний груза. Амплитуда  $A$  равна начальному отклонению груза от положения равновесия, которое определяется равенством

$$mg = kx_0 = kA, \text{ откуда } x_0 = A = \frac{mg}{k}.$$

Следовательно, максимальное растяжение пружины равно

$$x_{\max} = 2A = \frac{2mg}{k},$$

и сила упругости нити равна

$$T = kx_{\max} = 2mg.$$

Отсюда получим

$$\mu Mg = 2mg, \text{ и } M = \frac{2m}{\mu}.$$

4. Максимальная высота подъема тела равна

$$h = \frac{v_{0y}^2}{2g}.$$

Так как при движении тела, брошенного под углом к горизонту, изменяется только вертикальная составляющая скорости, то максимальное изменение импульса равно

$$\Delta p = \Delta p_y = 2mv_{0y}.$$

Отсюда находим

$$v_{0y} = \frac{\Delta p}{2m}, \text{ и } h = \frac{\Delta p^2}{8gm^2} = 5,1 \text{ м}.$$

5.  $v_{\max} = A\omega = 0,02 \text{ м} \cdot 5 \text{ с}^{-1} = 0,1 \text{ м/с}.$

6. Давление и плотность смеси газов равны соответственно

$$p = p_1 + p_2 = n_1 kT + n_2 kT \text{ и } \rho = m_1 n_1 + m_2 n_2,$$

где  $m_1$  – масса молекул гелия и  $m_2$  – масса молекул азота, а  $n_1$

и  $n_2$  – их концентрации. Отсюда получаем

$$n_1 = \frac{\frac{p}{kT} - \frac{\rho}{m_2}}{1 - \frac{m_1}{m_2}} = \frac{N_A \left( \frac{p}{RT} - \frac{\rho}{M_2} \right)}{1 - \frac{M_1}{M_2}} = 1,61 \cdot 10^{25} \text{ м}^{-3}$$

(здесь  $M_1 = 4$  г/моль и  $M_2 = 28$  г/моль – молярные массы гелия и азота соответственно).

7. Согласно первому закону термодинамики,

$$Q_{123} = \Delta U_{123} + A_{123},$$

где

$$A_{123} = A_{12} + A_{23} \text{ и } \Delta U_{123} = \Delta U_{12} + \Delta U_{23}.$$

В изохорном процессе  $A_{12} = 0$ , а в изотермическом процессе  $\Delta U_{23} = 0$ . Поэтому

$$Q_{123} = \Delta U_{12} + A_{23}.$$

При переходе 2–3

$$Q_{23} = \Delta U_{23} + A_{23} = A_{23}.$$

Следовательно,

$$Q_{123} = \Delta U_{12} + Q_{23}.$$

Изменение внутренней энергии газа при переходе 1–2 равно

$$\Delta U_{12} = \frac{3}{2} \nu R \Delta T_{12}.$$

Поскольку  $\Delta T_{12} = 2T_0$ , то

$$\Delta U_{12} = 3\nu RT_0.$$

Поэтому

$$Q_{123} = 3\nu RT_0 + Q_{23}, \text{ и } \frac{A_{123}}{Q_{123}} = \frac{Q_{23}}{3\nu RT_0 + Q_{23}} \approx 0,5.$$

8. Работа электрического поля при перемещении заряда  $q$  из центра колец в бесконечность равна

$$A = q\varphi_0,$$

где, согласно принципу суперпозиции, потенциал в центре колец равен

$$\varphi_0 = \varphi_1 + \varphi_2 = \frac{\tau \cdot 2\pi R}{4\pi\epsilon_0 R} - \frac{2\tau \cdot 2\pi \cdot 2R}{4\pi\epsilon_0 \cdot 2R} = -\frac{\tau}{2\epsilon_0}.$$

Отсюда получим

$$A = -\frac{q\tau}{2\epsilon_0}.$$

Напряженность поля в центре колец равна нулю.

9. Сила тока в резисторе сопротивлением  $R$  равна

$$I = \frac{U}{R}.$$

Напряжение на батарее конденсаторов равно

$$U_{\text{бат}} = I \frac{3R \cdot 2R}{3R + 2R} = \frac{6}{5}U.$$

Емкость батареи конденсаторов равна

$$C_{\text{бат}} = \frac{C \cdot 2C}{C + 2C} = \frac{2}{3}C.$$

Заряд на каждом конденсаторе в отдельности равен заряду на батарее конденсаторов:

$$q = C_{\text{бат}} U_{\text{бат}} = \frac{2}{3}C \cdot \frac{6}{5}U = \frac{4}{5}CU.$$

Напряжение на конденсаторе емкостью  $C$  равно

$$U_C = \frac{q}{C} = \frac{4}{5}U = 4 \text{ В}.$$

10. При постоянной угловой скорости вращения стержня мощность силы, действующей на стержень, равна тепловой мощности, выделяющейся в стержне, имеющем сопротивление  $R$ , т.е.

$$Fv = \frac{\epsilon}{R},$$

где  $v = \omega L$  – скорость точки  $D$ ,  $\epsilon = -\frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = -B \frac{\Delta S}{\Delta t} = -\frac{1}{2}B\omega L^2$  –

ЭДС индукции, возникающая в контуре  $OCD$ . Отсюда найдем

$$F = \frac{B^2 \omega L^3}{4R}.$$

II тур

Вариант 1

1. Пусть  $AD = s$ ,  $CD = x$ , скорость движения машины по шоссе равна  $v$ , скорость движения машины по полю равна  $v/2$ . Тогда общее время движения из пункта  $A$  до пункта  $B$  равно

$$t = \frac{s-x}{v} + \frac{\sqrt{L^2 + x^2}}{v/2} = \frac{s-x+2\sqrt{L^2 + x^2}}{v}.$$

Минимальное значение функция  $t(x)$  принимает в точке, где  $t'(x) = 0$ :

$$t'(x) = \frac{1}{v} \left( -1 + \frac{2 \cdot 2x}{2\sqrt{L^2 + x^2}} \right) = \frac{1}{v} \left( -1 + \frac{2x}{\sqrt{L^2 + x^2}} \right) = 0.$$

Отсюда находим

$$x = \frac{L}{\sqrt{3}} \approx 0,58L.$$

$$2. T = \frac{1}{4\pi\epsilon_0\epsilon L^2} \left( q_1^2 - \frac{q_2^2}{3\sqrt{3}} \right) = \frac{1,25q^2}{4\pi\epsilon_0\epsilon L^2} \approx \frac{0,3q^2}{4\pi\epsilon_0 L^2}.$$

3. Пусть  $C$  – центр масс клина, а  $O$  – центр масс системы «тело–клин». Найдем координату центра масс системы в момент, когда тело находится на *вершине* клина:

$$x_O = \frac{3m \cdot x_C}{m + 3m}.$$

Теперь найдем координату центра масс системы в момент, когда тело находится *у основания* клина:

$$x_O = \frac{m(l \cos \alpha - \Delta x) + 3m(x_C - \Delta x)}{m + 3m},$$

где  $\Delta x$  – перемещение клина при спускании тела с вершины клина к его основанию. Так как вдоль оси  $x$  на тело не действуют внешние силы, то центр масс системы не смещается. Тогда

$$\frac{3mx_C}{m + 3m} = \frac{m(l \cos \alpha - \Delta x) + 3m(x_C - \Delta x)}{m + 3m},$$

$$\text{и } \Delta x = \frac{ml \cos \alpha}{m + 3m} = \frac{l\sqrt{3}}{8}.$$

4. По второму закону Ньютона,

$$\vec{F} = \frac{\Delta \vec{p}}{\Delta t} = \frac{m \Delta \vec{v}}{\Delta t}.$$

Здесь  $m = \rho v S \Delta t$  – масса жидкости, протекающей со скоростью  $v$  через сечение трубы за время  $\Delta t$ , а  $\Delta v = v\sqrt{2}$ . Таким образом,

$$F = \frac{\rho v S \Delta t v \sqrt{2}}{\Delta t} = \rho v^2 S \sqrt{2}.$$

Зная расход жидкости  $Q$ , можно найти скорость течения жидкости в трубе:

$$v = \frac{Q}{S}.$$

Окончательно получим

$$F = \rho \frac{Q^2}{S^2} S \sqrt{2} = \rho \frac{Q^2}{S} \sqrt{2} = 25 \text{ Н}.$$

5. КПД цикла равен

$$\eta = 1 - \frac{T_2}{T_1},$$

где  $T_1$  – температура нагревателя,  $T_2$  – температура холодильника. При адиабатическом расширении

$$0 = \Delta U + A, \quad A = -\Delta U,$$

$$A = \frac{3}{2} \nu R (T_1 - T_2) = \frac{3}{2} \nu R T_1 \left( 1 - \frac{T_2}{T_1} \right) = \frac{3}{2} \nu R T_1 \eta.$$

Отсюда получаем

$$T_1 = \frac{2A}{3\nu R \eta}.$$

6. Тепловая мощность, выделяющаяся на резисторе сопротивлением  $R_x$ , равна

$$P_x = I^2 R_x, \text{ где } I = \frac{U}{R_1 + R_x}.$$

Искомую величину  $R_x$  найдем из условия  $\frac{dP_x}{dR_x} = 0$ :

$$\frac{dP_x}{dR_x} = U^2 \frac{(R_1 + R_x)^2 - R_x \cdot 2(R_1 + R_x)}{(R_1 + R_x)^4} = 0,$$

$$R_1^2 + 2R_1 R_x + R_x^2 - 2R_1 R_x - 2R_x^2 = 0,$$

$$-R_x^2 = -R_1^2, \quad R_x = R_1 = 10 \text{ Ом}.$$

Максимальная мощность равна

$$P_{\max} = \frac{U^2}{(R_1 + R_x)^2} R_x = \frac{U^2}{4R_1} = 250 \text{ Вт}.$$

7. Используя уравнение Эйнштейна для фотоэффекта, найдем скорость вылетающих из металлической пластины электронов:

$$h \frac{c}{\lambda} = A + \frac{mv^2}{2}, \text{ и } v = \sqrt{\frac{2 \left( h \frac{c}{\lambda} - A \right)}{m}}.$$

По второму закону Ньютона для электрона в магнитном поле,

$$\frac{mv^2}{R} = evB.$$

Следовательно, радиус окружности, по которой движется электрон в магнитном поле, равен

$$R = \frac{mv}{eB}.$$

Из рисунка 38 видно, что

$$h = R(1 - \sin \alpha).$$

Окончательно получим

$$h = \frac{1}{2eB} \sqrt{2m \left( \frac{hc}{\lambda} - A \right)}.$$

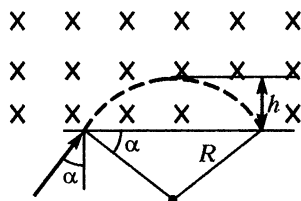


Рис. 38

8. Если посеребрить плоскую поверхность, то свет, падающий на линзу, пройдет через нее, отразится от плоской поверхности и вновь пройдет через линзу. Поэтому

$$D = D_1 + D_2 + D_1 = 2D_1 + D_2,$$

где  $D_1$  — оптическая сила линзы, а  $D_2$  — оптическая сила плоского зеркала. Так как  $D_1 = 1$  дптр, а  $D_2 = 0$ , то

$$D = 2 \text{ дптр}.$$

9. В момент, когда токи через катушки достигают максимума, вся энергия, ранее запасенная в конденсаторе, переходит в энергию магнитного поля токов:

$$L \frac{I_1^2}{2} + 2L \frac{I_2^2}{2} = \frac{q^2}{2C}.$$

Так как катушки включены параллельно, после замыкания ключа ЭДС индукции на катушках должны быть равны между собой:

$$L \frac{\Delta I_1}{\Delta t} = 2L \frac{\Delta I_2}{\Delta t}.$$

Кроме того, начальные значения токов в момент замыкания ключа равны нулю, следовательно, для момента, когда токи в катушках достигают максимальных значений, выполняется соотношение

$$LI_1 = 2LI_2.$$

Отсюда получим

$$q = I_1 \sqrt{\frac{3}{2} LC}.$$



10. Пусть  $v_0$  – скорость шара в момент удара. Так как трение между клином и плитой отсутствует, то в проекциях на горизонтальную ось  $x$  выполняется закон сохранения импульса:

$$mv_0 = (m + M)v_x,$$

где  $v_x$  – горизонтальная составляющая скорости шара после столкновения, равная скорости клина (в противоположном случае шар не упадет в ту же точку). В соответствии с законом сохранения энергии,

$$\frac{mv_0^2}{2} = \frac{(m + M)}{2}v_x^2 + \frac{m}{2}v_y^2,$$

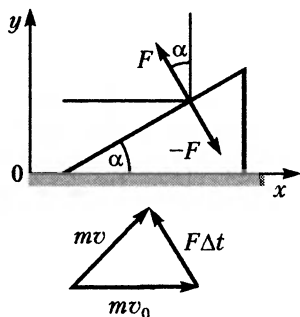


Рис. 39

где  $v_y$  – вертикальная составляющая скорости шара после столкновения с клином. Пусть за время удара  $\Delta t$  шарика о клин между ними действовала сила, среднее значение которой равно  $\bar{F}$ . Из-за отсутствия трения сила  $\bar{F}$  направлена перпендикулярно поверхности клина (рис.39). Тогда в проекциях на координатные оси уравнения второго закона Ньютона для обоих тел будут иметь вид

$$mv_y = F\Delta t \cos \alpha, \quad Mv_x = F\Delta t \sin \alpha.$$

После несложных преобразований найдем искомое соотношение:

$$\frac{m}{M} = \frac{\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} = 2.$$

Вариант 2

$$1. \quad L' = L_0 \sqrt{\sin^2 \alpha + \left(1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2\right) \cos^2 \alpha} = 0,9L_0 = 0,9 \text{ м}$$

(второй катет не изменяет своей длины).

2. При перемещается груза массой  $m$  на  $\Delta l$  точка  $A$  (см. рис.20 в условии) смещается тоже на  $\Delta l$ , а точка  $D$  – на  $\Delta l/2$ . Нить  $OD$  деформируется тоже на  $\Delta l/2$ . Длина всей шарнирной системы увеличивается на  $\Delta l/2$ , а следовательно, центр масс смещается на  $\Delta l/2$ . Работа искомой силы натяжения нити равна  $T\Delta l/2$ . Очевидно, изменение потенциальной энергии груза должно быть равно работе этой силы натяжения:

$$mg\Delta l = T \frac{\Delta l}{2}.$$

Отсюда получаем

$$T = 2mg.$$

3. Пусть  $v_0 = \sqrt{2gH}$ , тогда

$$v_1 = \frac{v_0}{n}, \quad v_2 = \frac{v_1}{n} = \frac{v_0}{n^2}, \quad \dots,$$

$$h_1 = \frac{v_1^2}{2g} = \frac{H^2}{n^2}, \quad h_2 = \frac{v_2^2}{2g} = \frac{H^2}{n^4}, \quad \dots, \quad \text{где } n = 3.$$

Путь, пройденный шариком до остановки, равен

$$\begin{aligned} s &= H + 2(h_1 + h_2 + \dots) = H + \frac{2H}{n^2} \left( 1 + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^4} + \dots \right) = \\ &= H + \frac{2H}{n^2 - 1} = H \frac{n^2 + 1}{n^2 - 1} = \frac{5}{4} H = 1,25H. \end{aligned}$$

4. Если вытекание происходит через малое отверстие, то, согласно формуле Торричелли,  $v = \sqrt{2gh}$ , где  $h$  – высота уровня жидкости в сосуде. Связь между скоростью истечения жидкости из отверстия и скоростью опускания уровня жидкости в сосуде получим, используя условие неразрывности  $uS_0 = vS$ , где  $u$  – скорость опускания жидкости в сосуде. Отсюда получим

$$u = \sqrt{2gh} \frac{S}{S_0}, \quad \text{или} \quad u^2 = 2gh \left( \frac{S}{S_0} \right)^2.$$

Следовательно, уровень жидкости движется равнозамедленно с ускорением

$$a = g \left( \frac{S}{S_0} \right)^2.$$

Если  $\tau$  – время вытекания жидкости из сосуда, то  $u = u_0 - a\tau$ , откуда

$$\tau = \frac{u_0 - u}{a} = \frac{S_0}{S} \sqrt{\frac{2}{g}} (\sqrt{H} - \sqrt{h}).$$

Для  $h = \frac{3}{4} H$

$$\tau \approx 0,13 \frac{S_0}{S} \sqrt{\frac{2H}{g}}.$$

5. Выполнение цикла 1-4-3-2-1 фактически эквивалентно выполнению двух простых циклов 1-0-2-1 и 0-4-3-0 (рис.40). Работа газа определяется площадью соответствующего цикла на  $pV$ -диаграмме. Однако если в первом цикле она положительная, то во втором она отрицательная (работа совершается над газом). Найдем работы  $A_1$  и  $A_2$ , учитывая, что площади подобных

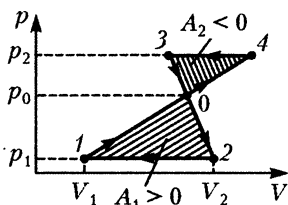


Рис. 40

треугольников относятся как квадраты длин соответствующих элементов:

$$A_1 = \frac{(p_0 - p_1)(V_2 - V_1)}{2},$$

$$A_2 = -A_1 \frac{(p_2 - p_0)^2}{(p_0 - p_1)^2}.$$

Полная работа  $A$  за цикл будет, таким

образом, равна

$$A = A_1 + A_2 =$$

$$= A_1 \left( 1 - \frac{(p_2 - p_0)^2}{(p_0 - p_1)^2} \right) = \frac{(p_0 - p_1)(V_2 - V_1)}{2} \left( 1 - \frac{(p_2 - p_0)^2}{(p_0 - p_1)^2} \right) \approx 750 \text{ Дж}.$$

6. Отрежем от рассматриваемой схемы первую секцию слева. По-прежнему справа останется бесконечное число секций, так что сопротивление между точками  $C$  и  $D$  (рис. 41) должно равняться искомому сопротивлению  $R$ :

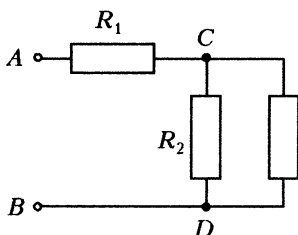


Рис. 41

$$R = R_1 + \frac{RR_2}{R + R_2}.$$

Получили квадратное уравнение относительно  $R$ . Решая его, находим

$$R = \frac{R_1}{2} \left( 1 + \sqrt{1 + 4 \frac{R_2}{R_1}} \right) = 4 \text{ Ом}.$$

7. Мощность переменного тока равна

$$P = I_d^2 R,$$

где  $I_d = I_0 / \sqrt{2}$  — действующее значение тока,  $I_0 = U_0 / \sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}$  — амплитуда тока. Тогда мощность тока равна

$$P = \frac{U_0^2 R}{2(R^2 + \omega^2 L^2)}.$$

Исследуем это выражение на экстремум и найдем  $R$ :

$$\frac{dP}{dR} = \frac{U_0^2}{2} \frac{(R^2 + \omega^2 L^2) - R \cdot 2R}{(R^2 + \omega^2 L^2)^2} = \frac{U_0^2}{2} \frac{(\omega^2 L^2 - R^2)}{(R^2 + \omega^2 L^2)^2} = 0,$$

$$\omega^2 L^2 - R^2 = 0, \quad R = \omega L = 0,4 \text{ Ом}.$$

Максимальная мощность равна

$$P_{\max} = \frac{U_0^2 \omega L}{2(\omega^2 L^2 + \omega^2 L^2)} = \frac{U_0^2}{4\omega L} = 62,5 \text{ Вт}.$$

8. Запишем закон сохранения энергии и закон сохранения импульса в проекциях на направление движения налетающей частицы:

$$\frac{m_1 v_0^2}{2} = \frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2}, \quad m_1 v_0 = m_1 v_1 + m_2 v_2,$$

где  $v_0$  – скорость, с которой первая частица налетает на покоящуюся частицу,  $v_1$  – скорость первой частицы после столкновения,  $v_2$  – скорость второй частицы после столкновения. Из этих равенств найдем скорость первой частицы после столкновения:

$$v_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_0.$$

Длины волн де Бройля первой частицы до и после столкновения равны

$$\lambda_1 = \frac{h}{mv_0} \quad \text{и} \quad \lambda_2 = \frac{h}{mv_1}.$$

По условию задачи  $\lambda_2/\lambda_1 = n$ , т.е.  $v_0/v_1 = n$ . Окончательно получим

$$m_2 = m_1 \frac{n-1}{n+1} = \frac{m_1}{3}.$$

9. Энергия атома на  $n$ -м энергетическом уровне равна  $E_n = E_1/n^2$ . Тогда

$$E_2 = \frac{E_1}{2^2} = \frac{E_1}{4} \quad \text{и} \quad E_4 = \frac{E_1}{4^2} = \frac{E_1}{16}.$$

Поскольку  $h\nu = E_4 - E_2$ , получаем

$$\nu = \frac{E_4 - E_2}{h}, \quad \lambda = \frac{c}{\nu} = \frac{ch}{E_4 - E_2} = -\frac{16ch}{3E_1} = 4,89 \cdot 10^{-7} \text{ м}.$$

10. При движении стержня в нем возникает ЭДС индукции  $\mathcal{E} = vBL$ , которая вызывает ток, заряжающий конденсаторы. Заряд батареи конденсаторов равен

$$q = C_{\text{бат}} \mathcal{E} = 2C \cdot vBL.$$

По цепи идет ток

$$I = \frac{\Delta q}{\Delta t} = 2CBL \frac{\Delta v}{\Delta t} = 2CBL \cdot a$$

где  $a$  – ускорение стержня. При возникновении этого тока на стержень в магнитном поле действует сила, равная

$$F = BLI = 2CB^2L^2a$$

и направленная, как и сила упругости пружин, к положению равновесия стержня. Запишем уравнение движения стержня в магнитном поле:

$$ma = -kx - 2CB^2L^2a, \text{ или } (m + 2CB^2L^2)a = -kx.$$

Такой вид уравнения движения показывает, что наличие магнитного поля равноценно изменению массы стержня, который будет совершать колебания с циклической частотой

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m + 2CB^2L^2}},$$

или с периодом колебаний

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m + 2CB^2L^2}{k}}.$$

### Вариант 3

1. Перейдем в систему отсчета, связанную с точкой  $A$ . В этой системе координаты точки  $B$  будут

$$x' = \Delta x = x_2 - x_1 = 10 - t - 2t = 10 - 3t \text{ и}$$

$$y' = \Delta y = y_2 - y_1 = 2t - t = t,$$

а расстояние между точками  $A$  и  $B$  будет

$$s = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} = \sqrt{(10 - 3t)^2 + t^2} = \sqrt{10t^2 - 60t + 100}.$$

Данное выражение является функцией независимой переменной – времени  $t$ . Известно, что функция принимает экстремальное значение в точке, где ее первая производная равна нулю:

$$\frac{ds}{dt} = \frac{20t - 60}{2\sqrt{10t^2 - 60t + 100}} = 0, \quad 20t - 60 = 0, \quad t = 3 \text{ (с)}.$$

Чтобы узнать, какое экстремальное значение – минимальное или максимальное – будет иметь функция расстояния, возьмем вторую производную от  $s$ . Получим, что  $S'' > 0$ . Значит, при  $t = 3$  с функция  $s$  принимает минимальное значение:

$$s_{\min} = \sqrt{10t^2 - 60t + 100} = \sqrt{10} \text{ м} \approx 3,2 \text{ м}.$$

2. См. рис.42.

3. Пусть длина недеформированной пружины равна  $l_0$ . В

положении равновесия пружина деформирована на величину

$$\Delta l_1 = \frac{2mg}{k}.$$

Если сместить верхнюю шайбу вниз от положения равновесия без начальной скорости на  $\Delta l$  и отпустить, то груз будет колебаться с амплитудой  $\Delta l$ . Для того

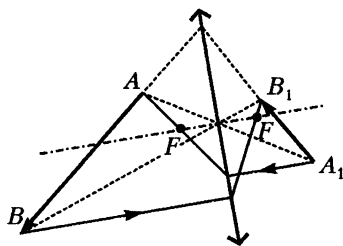


Рис. 42

чтобы нижняя шайба могла оторваться от горизонтальной плоскости, верхняя шайба должна сместиться вверх от положения равновесия на величину начальной деформации  $\Delta l_1$ . При этом пружина окажется недеформированной, и шайба, двигаясь далее вверх, растянет ее на

$$\Delta l_2 = \frac{mg}{k},$$

т.е. на столько, чтобы сила упругости стала равна силе тяжести нижней шайбы:

$$k\Delta l_2 = mg.$$

Значит, амплитуда колебаний должна быть равна

$$A = \Delta l_1 + \Delta l_2 = \frac{2mg}{k} + \frac{mg}{k}.$$

При этом максимальное сжатие пружины (относительно недеформированного состояния  $l_0$ ) будет

$$\Delta l_{\max} = \Delta l_1 + A = \frac{2mg}{k} + \frac{2mg}{k} + \frac{mg}{k} = \frac{5mg}{k}.$$

4. Пусть масса стержня  $m$ , а его длина  $l$ . Запишем условия равновесия стержня (рис.43):

$$\sum \vec{F}_i = 0, \quad \sum M_i = 0,$$

или (для первого условия)

$$N_2 = F_{\text{тр}1}, \quad N_1 = mg - F_{\text{тр}2},$$

где

$$F_{\text{тр}1} = \mu_1 N_1, \quad F_{\text{тр}2} = \mu_2 N_2 = \mu_2 F_{\text{тр}1}.$$

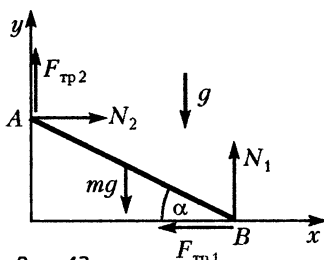


Рис. 43

Отсюда получим

$$F_{\text{тр}1} = \frac{\mu_1}{1 + \mu_1 \mu_2} mg, \quad F_{\text{тр}2} = \frac{\mu_1 \mu_2}{1 + \mu_1 \mu_2} mg.$$

Условие равенства нулю суммы моментов сил относительно точки  $B$  имеет вид

$$\frac{mgl}{2} \cos \alpha = F_{\text{тр}2} l \cos \alpha + N_2 l \sin \alpha.$$

Подставляя сюда выражения для  $F_{\text{тр}2}$  и  $N_2 = F_{\text{тр}1}$ , после преобразований получим

$$\mu_2 = \frac{\cos \alpha - 2\mu_1 \sin \alpha}{\mu_1 \cos \alpha} = 0,85.$$

5. Используя уравнение состояния идеального газа, перепишем уравнение процесса в виде

$$pV^n = pVV^{n-1} = \nu RTV^{n-1} = \text{const}, \text{ где } n = 3,$$

или

$$T_1 V_1^{n-1} = T_2 V_2^{n-1}.$$

Тогда

$$T_2 - T_1 = T_1 \left( \left( \frac{V_1}{V_2} \right)^{n-1} - 1 \right) = \frac{p_1 V_1}{\nu R} \left( \left( \frac{V_1}{V_2} \right)^{n-1} - 1 \right) = -72 \text{ К}.$$

В процессе 1-2 газ охлаждается.

6. Для цикла 1-2-3-1

$$\eta_1 = \frac{A_1}{Q_1} = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} = 1 - \frac{Q_2}{Q_1},$$

где  $A_1$  — полезная работа,  $Q_1$  и  $Q_2$  — количества теплоты, подводимые и отводимые в этом цикле. Отсюда

$$A_1 = \eta_1 Q_1, \quad Q_2 = Q_1 (1 - \eta_1).$$

Аналогично, для цикла 1-3-4-1

$$\eta_2 = \frac{A_2}{Q_2}, \text{ или } A_2 = \eta_2 Q_2 = \eta_2 Q_1 (1 - \eta_1), \quad Q_2 = Q_1 (1 - \eta_1).$$

Для цикла 1-2-3-4-1

$$\eta = \frac{A_1 + A_2}{Q_1} = \frac{\eta_1 Q_1 + \eta_2 Q_1 (1 - \eta_1)}{Q_1} = \eta_1 + \eta_2 (1 - \eta_1) = 0,17 = 17\%.$$

7. Данный конденсатор можно рассматривать как два конденсатора емкостями

$$C'_1 = \frac{\epsilon_1 \epsilon_0 S}{d/2} = 2\epsilon_1 C_0 \text{ и } C''_1 = \frac{\epsilon_2 \epsilon_0 S}{d/2} = 2\epsilon_2 C_0,$$

соединенных последовательно, где  $C_0 = \epsilon_0 S/d$  — емкость воздушного конденсатора. Емкость такого конденсатора равна

$$C_1 = \frac{C'_1 C''_1}{C'_1 + C''_1} = \frac{2\epsilon_1 C_0 \cdot 2\epsilon_2 C_0}{2\epsilon_1 C_0 + 2\epsilon_2 C_0} = \frac{2\epsilon_1 \epsilon_2}{\epsilon_1 + \epsilon_2} C_0 = 18,75 \cdot 10^{-10} \text{ Ф}.$$

При последовательном соединении конденсаторов подаваемое на них напряжение  $U$  равно сумме напряжений на первом и втором:

$$U = U_1 + U_2 = E_1 \frac{d}{2} + E_2 \frac{d}{2} = (E_1 + E_2) \frac{d}{2}.$$

При этом

$$\varepsilon_1 E_1 = \varepsilon_2 E_2.$$

Отсюда находим искомую напряженность:

$$E_2 = \frac{2\varepsilon_1 U}{(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)d} = 0,75 \cdot 10^4 \text{ В/м}.$$

После извлечения диэлектрика с диэлектрической проницаемостью  $\varepsilon_1$  емкость первого конденсатора изменится, емкость всего конденсатора станет равной

$$C_2 = \frac{C'_2 C''_1}{C'_2 + C''_1} = \frac{2C_0 \cdot 2\varepsilon_2 C_0}{2C_0 + 2\varepsilon_2 C_0} = \frac{2\varepsilon_2}{1 + \varepsilon_2} C_0 = 8,3 \cdot 10^{-10} \text{ Ф}$$

и по цепи протечет заряд

$$\Delta q = U(C_2 - C_1).$$

При этом источник тока совершит работу

$$A = \Delta q U = (C_2 - C_1) U^2 = -10,45 \cdot 10^{-6} \text{ Дж}.$$

$$8. q = C\Phi = (4\pi\varepsilon_0 r) \left( \frac{\hbar(c/\lambda) - A}{e} \right) = 1,45 \cdot 10^{-11} \text{ Кл}.$$

9. По закону Ома для замкнутого контура (рис.44)

$$I_0 = \frac{\mathcal{E}}{(R/2) + (2R/3)} = \frac{6\mathcal{E}}{7R}.$$

Воспользуемся уравнениями

Кирхгофа для узла  $c$ :

$$I_0 = I_1 + I_2,$$

для контура  $abca$ :

$$I_1 R - I_2 R = 0,$$

для узла  $d$ :

$$I_0 = I_3 + I_4,$$

для контура  $adba$ :

$$I_3 R - I_4 \cdot 2R = 0,$$

для узла  $a$ :

$$I_1 = I + I_3.$$

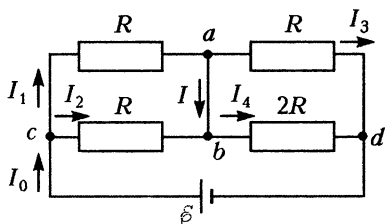


Рис. 44



Отсюда найдем

$$I = \frac{I_0}{2} - \frac{2}{3} I_0 = -\frac{I_0}{6} = -\frac{\mathcal{E}}{7R}.$$

Знак минус означает, что ток течет от точки  $b$  к точке  $a$ .

**10.** Так как сопротивление контура равно нулю, суммарная ЭДС в контуре должна быть равна нулю. Значит, суммарный магнитный поток через контур не должен изменяться. Если перемычка сдвинулась на величину  $x$  и в ней появился ток  $I$ , то изменение суммарного магнитного потока равно

$$\Delta\Phi = Bhx + LI = 0.$$

Отсюда

$$I = -\frac{Bh}{L} x.$$

По закону Ампера на перемычку с током действует сила

$$F_x = IBh = -\frac{B^2 h^2}{L} x,$$

и перемычка движется с ускорением

$$a_x = \frac{F_x}{m} = -\frac{B^2 h^2}{mL} x.$$

Из последнего уравнения следует, что перемычка совершает колебательное движение с круговой частотой

$$\omega = \frac{Bh}{\sqrt{mL}}.$$

Для колебательного движения максимальная скорость равна

$$v_{\max} = A\omega.$$

В нашем случае  $v_{\max} = v_0$ ,  $A = s$ , поэтому

$$v_0 = s\omega = \frac{sBh}{\sqrt{Lm}},$$

откуда

$$m = \frac{s^2 B^2 h^2}{Lv_0^2}.$$

Скорость перемычки описывается уравнением

$$v = v_0 \cos \omega t.$$

В искомый момент времени  $t_1$   $v = v_0/2$ . Тогда

$$\frac{v_0}{2} = v_0 \cos \omega t_1, \quad \cos \omega t_1 = \frac{1}{2}, \quad t_1 = \frac{\pi}{3\omega} = \frac{\pi s}{3v_0}.$$

**МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ  
(ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)**

Олимпиада «Физтех-2014»

Заключительный этап

МАТЕМАТИКА

Вариант 1

1.  $x = 2, x = \frac{2}{3}$ .

На ОДЗ данное уравнение равносильно совокупности двух уравнений

$$\begin{cases} 2^{x+1} + 1 = 10 - 2^{2-x}, \\ 3x^2 + 4x - 3 = 1, \end{cases}$$

которую можно записать в виде

$$\begin{cases} 2 \cdot 2^{2x} - 9 \cdot 2^x + 4 = 0, \\ 3x^2 + 4x - 4 = 0. \end{cases}$$

Из первого уравнения получаем  $2^x = \frac{1}{2}$  или  $2^x = 4$ , откуда  $x = -1$  или  $x = 2$ . Из второго уравнения следует, что  $x = -2$  или  $x = \frac{2}{3}$ . ОДЗ удовлетворяют только значения  $x = 2$  и  $x = \frac{2}{3}$ .

2.  $x = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$ .

На ОДЗ данное уравнение равносильно каждому из следующих:

$$\frac{\cos x \cdot \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)}{\cos 2x} + \frac{\cos x \cdot \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)}{\cos 2x} = \frac{\sin 2x}{\sqrt{2} \cos 2x},$$

$$\cos x \cdot \left( \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \right) = \sqrt{2} \sin x \cos x,$$

$$\cos x \cdot \sqrt{2} \cos x = \sqrt{2} \sin x \cos x,$$

откуда  $\cos x = 0$  или  $\operatorname{tg} x = 1$ , т.е.  $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$  или  $x = \frac{\pi}{4} + \pi k$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ . Условию  $\cos 2x \neq 0$  удовлетворяют только значения  $x = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$ .

$$3. (1; -1), \left(2; -\frac{1}{2}\right).$$

Первое уравнение можно переписать в виде  $(x - 2y)^2 - 2(x - 2y) - 3 = 0$ , откуда следует, что  $x - 2y = 3$  или  $x - 2y = -1$ . Если  $x - 2y = -1$ , то подкоренное выражение во втором уравнении отрицательно и система не имеет решений. Если  $x - 2y = 3$ , то второе уравнение принимает вид  $3 = 2 - y(2y + 3)$ , откуда  $y = -1$  или  $y = -\frac{1}{2}$ .

В итоге получаем два решения — пары чисел  $(1; -1)$  и  $\left(2; -\frac{1}{2}\right)$ .

$$4. \angle BOC = 90^\circ, S = 30, r = \sqrt{10}.$$

Так как окружность вписана в углы  $A$  и  $B$  трапеции (рис. 45), то ее центр  $O$  лежит на пересечении биссектрис этих углов.

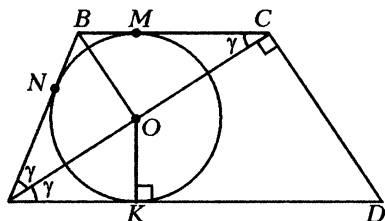


Рис. 45

Поскольку угол между биссектрисами внутренних односторонних углов при параллельных прямых равен  $90^\circ$ , то  $\angle AOB = 90^\circ$  и поэтому  $\angle BOC = 90^\circ$ .

Треугольник  $ABC$  равнобедренный, так как  $BO$  является его высотой и биссектрисой. Значит,  $BO$  также является медианой, поэтому  $AO = CO = 2\sqrt{5}$ . Пусть  $\angle CAD = \angle BAC = \angle BCA = \gamma$ . Из прямоугольного треугольника  $MOB$  находим, что  $MB = 4$ ,  $\tan \gamma = \frac{1}{2}$ ,  $\cos \gamma = \frac{2}{\sqrt{5}}$ ,  $\sin \gamma = \frac{1}{\sqrt{5}}$ .

Поскольку вокруг четырехугольника  $KOCD$  можно описать окружность, сумма его противоположных углов равна  $180^\circ$ . Следовательно,  $\angle OCD = 90^\circ$ . Из прямоугольного треугольника  $ACD$  находим, что  $AD = \frac{AC}{\cos \gamma} = 10$ ,  $CD = AC \cdot \tan \gamma = 2\sqrt{5}$ . Из треугольника  $BOC$  получаем, что  $BC = \frac{CO}{\cos \gamma} = 5$ . Находим площадь трапеции:  $S = \frac{1}{2} MK \cdot (BC + AD) = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 15 = 30$ .

Отрезок  $OD$  является диаметром окружности  $\Omega$ . Из треугольника  $COD$  получаем:  $OD^2 = CO^2 + CD^2 = 20 + 20 = 40$ ;  $OD = 2\sqrt{10}$ . Следовательно, радиус  $r$  окружности  $\Omega$  равен  $\sqrt{10}$ .

### 5. 126.

Правая часть представляет собой произведение натуральных степеней чисел 2, 3, 5. Следовательно, в разложении левой части на простые множители также будут содержаться только множители 2, 3, 5. Тогда числа  $x$  и  $y$  можно записать как  $x = 3^\alpha \cdot 5^\beta \cdot 2^\gamma$ ,  $y = 3^\lambda \cdot 5^\mu \cdot 2^\nu$ , где все показатели степеней есть целые неотрицательные числа. Уравнение принимает вид  $3^{3\alpha+2\lambda} \cdot 5^{3\beta+2\mu} \cdot 2^{3\gamma+2\nu} = 3^{15} \cdot 5^{35} \cdot 2^{40}$ . Это равносильно системе уравнений

$$\begin{cases} 3\alpha + 2\lambda = 15, \\ 3\beta + 2\mu = 35, \\ 3\gamma + 2\nu = 40. \end{cases}$$

Чтобы все переменные принимали целые неотрицательные значения необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия  $\alpha \in \{1; 3; 5\}$ ,  $\beta \in \{1; 3; 5; 7; 9; 11\}$ ,  $\gamma \in \{0; 2; 4; 6; 8; 10; 12\}$ . Получаем три варианта для первого уравнения, шесть вариантов для второго и семь для третьего. В итоге  $3 \cdot 6 \cdot 7 = 126$  решений.

$$6. \ x \in \left(-2; -\frac{\pi}{2}\right) \cup \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{1}{2}\right) \cup \left\{\frac{2\pi}{3}; 3; \frac{5\pi}{3}\right\}.$$

Меньшее из выражений не превосходит двух тогда и только тогда, когда хотя бы одно из выражений не превосходит двух. Получаем совокупность неравенств

$$\begin{cases} f(x) \leq 2, \\ g(x) \leq 2. \end{cases}$$

Первое неравенство равносильно каждому из следующих:

$$1 + \operatorname{tg}^2 x + 2\sqrt{3} \operatorname{tg} x + 4 \leq 2, \quad (\operatorname{tg} x + \sqrt{3})^2 \leq 0,$$

откуда

$$\operatorname{tg} x = -\sqrt{3}, \quad x = -\frac{\pi}{3} + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Рассмотрим неравенство

$$\frac{2x-1}{\sqrt{16+6x-x^2}} + \frac{\sqrt{16+6x-x^2}}{2x-1} \leq 2.$$

В его левой части записана сумма двух взаимно обратных чисел. Она не превосходит двух в одном из двух случаев:

$$a) \text{ каждое из чисел отрицательно, т.е. } \frac{2x-1}{\sqrt{16+6x-x^2}} < 0,$$

$$\text{откуда } x \in \left(-2; \frac{1}{2}\right);$$

б) каждое из чисел равно единице, т.е.  $\frac{2x-1}{\sqrt{16+6x-x^2}}=1$ ,  
откуда  $4x^2-4x+1=16+6x-x^2$ ,  $x^2-2x-3=0$ ,  $x=3$ .

За счет области определения функции  $f(x)$  получаем ограничение  $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi m, m \in \mathbb{Z}$ , а за счет области определения  $g(x)$  – ограничение  $x \in (-2; 8) \setminus \left\{ \frac{1}{2} \right\}$ .

Объединяя решения и учитывая ОДЗ, получаем, что

$$x \in \left(-2; -\frac{\pi}{2}\right) \cup \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{1}{2}\right) \cup \left\{\frac{2\pi}{3}; 3; \frac{5\pi}{3}\right\}.$$

7.  $\angle ACB = 45^\circ$ ,  $CD = 12$ ,  $V = 18\sqrt{3}$ .

Предположим, что сфера касается прямых  $AC$  и  $AD$ . Тогда  $AB$  перпендикулярно плоскости  $ACD$ , поэтому сфера имеет единственную общую точку  $A$  с плоскостью  $ACD$ , и значит, не имеет общих точек с ребром  $CD$ . С прямыми  $BA$ ,  $BC$ ,  $BD$  сфера будет иметь по две точки пересечения, что противоречит усло-

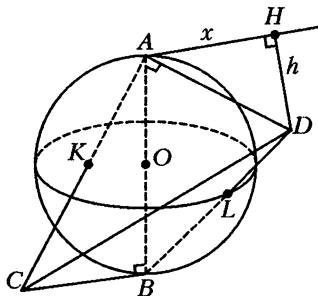


Рис. 46

вию. Аналогично доказывается, что сфера не может касаться одновременно ребер  $BC$  и  $BD$ . Значит, сфера касается ровно одной из двух прямых  $AC$  или  $AD$  – пусть, для определенности, ребра  $AD$  (рис. 46). Тогда сфера также касается прямых  $BC$  и  $CD$  и проходит через середины  $K$  и  $L$  ребер  $AC$  и  $BD$  соответственно.

Рис. 46

Из касания сферы с прямой  $BC$  следует, что  $BC \perp AB$ . Так как  $OK$  – средняя линия треугольника  $ABC$  ( $O$  – центр сферы), то  $BC = 2OK = 2R = AB$ , откуда вытекает, что  $ABC$  прямоугольный равнобедренный треугольник и  $\angle ACB = 45^\circ$ . Аналогично доказывается, что  $BAD$  – равнобедренный прямоугольный треугольник с гипотенузой  $BD$ .

Пусть  $M$  – точка касания сферы с ребром  $CD$ . Тогда  $CM = CB$  и  $DM = DA$  (как касательные к сфере, проведенные из одной точки). Значит,  $CD = AD + BC = 2R + 2R = 4R$ .

Опустим из вершины  $D$  высоту  $DH$  на плоскость  $ABC$ . Точка  $H$  лежит на прямой, проходящей через точку  $A$  параллельно  $CB$ . Пусть  $DH = h$ ,  $AH = x$ . Тогда  $CH^2 = (2R)^2 + (2R + x)^2$  (рис. 47). По теореме Пифагора из треугольников  $ADH$  и  $CDH$

получаем  $x^2 + h^2 = 4R^2$ ,  $(x + 2R)^2 + (2R)^2 + h^2 = (4R)^2$ . Решая эти уравнения, находим, что  $x = R$ ,  $h = R\sqrt{3}$ . Тогда объем  $V$  пирамиды  $ABCD$  равен

$$\frac{1}{3} \cdot R\sqrt{3} \cdot 2R^2 = \frac{2R^3}{\sqrt{3}} = 18\sqrt{3}.$$

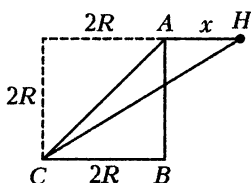


Рис. 47

Вариант 2

1.  $x = 4$ ,  $x = -2$ .

2.  $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ .

3.  $(1; 1)$ ,  $\left(2; \frac{1}{2}\right)$ .

4.  $\angle COD = 90^\circ$ ,  $S = 26$ ,  $r = \frac{5\sqrt{13}}{6}$ .

5. 126.

6.  $x \in (-1; 0) \cup \left(0; \frac{3}{2}\right) \cup \left\{4; \frac{4\pi}{3}; \frac{7\pi}{3}\right\}$ .

7.  $\angle ABC = 45^\circ$ ,  $BD = 4\sqrt{3}$ ,  $V = 6$ .

Вариант 3

1.  $(2; -2)$ ,  $(-1; -2)$ ,  $(-4 - 2\sqrt{6}; -8 - 4\sqrt{6})$ ,  $(-4 + 2\sqrt{6}; -8 + 4\sqrt{6})$ .

Вычитая из первого уравнения второе уравнение, умноженное на 2, получаем  $2x^2 + xy - y^2 = 0$ , откуда  $y = 2x$  или  $y = -x$ . Если  $y = -x$ , то из первого уравнения следует, что  $2x^3 = 16$ , откуда  $x = 2$ ,  $y = -2$ . Если  $y = 2x$ , то первое уравнение системы принимает вид  $2x^3 + 18x^2 - 16 = 0$ , откуда  $x = -1$  или  $x = -4 \pm 2\sqrt{6}$ . В итоге получаем три решения —  $(-1; -2)$ ,  $(-4 - 2\sqrt{6}; -8 - 4\sqrt{6})$ ,  $(-4 + 2\sqrt{6}; -8 + 4\sqrt{6})$ .

2.  $x = \frac{\pi}{6} + \pi k$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ .

На ОДЗ данное уравнение равносильно каждому из следующих:

$$\sqrt{3} \left( \frac{\sin x}{\sin x - \cos x} - \frac{2 \sin x \cos x}{(\sin x - \cos x)(\sin x + \cos x)} \right) = \frac{\cos x}{\sin x + \cos x},$$



В прямоугольном треугольнике  $ABK$  известно, что  $AK = 2R = 2\sqrt{13}$ ,  $BK = 2r = 4$ . По теореме Пифагора находим, что  $AB = 6$ . Окружность  $\omega$  вписана в угол  $DAB$ , поэтому ее центр  $Q$  лежит на биссектрисе этого угла. Значит,

$$\angle BAD = 2\angle BAQ = 2 \operatorname{arctg} \frac{1}{3}.$$

Тогда

$$\cos \angle BAD = \frac{1 - 1/9}{1 + 1/9} = \frac{4}{5}, \quad \sin \angle BAD = \frac{2 \cdot 1/3}{1 + 1/3} = \frac{3}{5}.$$

Обозначим  $\angle BAD = \gamma$ . Тогда  $\angle CBA = 180^\circ - \gamma$ ,  $\angle CBK = \angle CBA - 90^\circ = 90^\circ - \gamma$ ,  $\angle CKB = 90^\circ - \angle CBK = \gamma$ . Из треугольника  $CBK$  находим, что  $CB = BK \sin \gamma = \frac{12}{5}$ . Опустим из точки  $B$  высоту  $BH$  на сторону  $AD$ . Тогда из треугольника  $ABH$  получаем:  $AH = AB \cos \gamma = \frac{24}{5}$ ,  $BH = AB \sin \gamma = \frac{18}{5}$ . Тогда площадь  $S$  трапеции  $ABCD$  равна

$$\frac{1}{2}(AD + BC)BH = \frac{1}{2}(2BC + AH)BH = \frac{1}{2} \cdot \frac{48}{5} \cdot \frac{18}{5} = \frac{432}{25}.$$

## 5. 276.

Число делится на 15 тогда и только тогда, когда оно делится на 3 и на 5. Для делимости на три необходимо и достаточно, чтобы сумма цифр этого числа делилась на три. Значит, чтобы полученное число делилось на три, из всех данных цифр мы должны отбросить либо ноль, либо тройку. Чтобы число делилось на 5, на последнем месте должны стоять либо 5, либо 0. Рассмотрим все варианты.

а) Отбрасываем цифру 3, на последнее место ставим цифру 0. Тогда на первые пять мест в произвольном порядке надо расставить цифры 1; 2; 3; 4; 5, что можно сделать  $5! = 120$  способами.

б) Отбрасываем цифру 3, на последнее место ставим цифру 5. Тогда на первые пять мест надо расставить цифры 0; 1; 2; 3; 4. Этот случай отличается от предыдущего тем, что на первом месте не должен стоять ноль. Число способов можно посчитать так: из общего количества перестановок пяти цифр вычесть количество перестановок, в которых ноль стоит на первом месте. Если ноль стоит на первом месте, то для подсчета нужно заметить, что мы имеем дело с перестановками четырех цифр, находящихся на втором – пятом местах. В итоге получаем  $5! - 4! = 96$  способов.



в) Отбрасываем цифру 0, на последнее место ставим 5. Тогда на оставшиеся 5 мест надо расставить цифры 1; 2; 2; 3; 4. Это можно сделать  $\frac{5!}{2} = 60$  способами.

В итоге получаем  $120 + 96 + 60 = 276$  способов.

$$6. x \in \left[-4; -\frac{\pi}{2}\right) \cup \left(-\frac{\pi}{2}; -1\right) \cup \{0; \pi; 2\pi; 7\}.$$

Меньшее из выражений не превосходит двух тогда и только тогда, когда хотя бы одно из выражений не превосходит двух. Получаем совокупность неравенств

$$\begin{cases} f(x) \leq 2, \\ g(x) \leq 2. \end{cases}$$

Второе неравенство равносильно следующему:

$$\frac{\sqrt{28 + 3x - x^2} + 2x + 2}{x + 1} \leq 2,$$

или

$$\frac{\sqrt{28 + 3x - x^2}}{x + 1} \leq 0,$$

откуда

$$\begin{cases} \begin{cases} 28 + 3x - x^2 = 0, \\ x + 1 \neq 0, \end{cases} \\ \begin{cases} 28 + 3x - x^2 > 0, \\ x + 1 < 0 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -4, \\ x = 7, \\ -4 < x < -1, \end{cases}$$

и тогда

$$x \in [-4; -1) \cup \{7\}.$$

Функция  $f(x)$  представляет собой сумму двух взаимно обратных положительных чисел. Она не превосходит двух только в одном случае – если каждое из чисел равно единице. Таким образом, неравенство  $f(x) \leq 2$  равносильно уравнению  $\operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi \cos x}{4}\right) = 1$ , откуда  $\frac{\pi \cos x}{4} = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ ,  $\cos x = 1 + 2k$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ . Учитывая, что  $-1 \leq \cos x \leq 1$ , получаем, что решения есть только при  $k = -1$  и  $k = 0$ , и эти решения задаются формулой  $x = \pi l$ ,  $l \in \mathbb{Z}$ .

За счет области определения функции  $f(x)$  получаем ограничение  $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi t$ ,  $t \in \mathbb{Z}$ , а за счет области определения фун-

кции  $g(x)$  – ограничение  $x \in [-4; 7] \setminus \{-1\}$ .

Объединяя решения и учитывая эти ограничения, находим, что

$$x \in \left[-4; -\frac{\pi}{2}\right) \cup \left(-\frac{\pi}{2}; -1\right) \cup \{0; \pi; 2\pi; 7\}.$$

7.  $AB = 12$ ,  $\angle ACB = 90^\circ$ ,  $V = 36\sqrt{3}$ .

а) Поскольку сфера построена на высоте пирамиды как на диаметре, она касается плоскости основания  $ABC$ . Значит, сфера имеет с плоскостью  $ABC$  ровно одну общую точку  $H$  и эта точка является серединой одного из ребер (рис. 49). Поскольку сфера проходит через середины четырех ребер пирамиды, она также пересекает отрезки  $SA$ ,  $SB$ ,  $SC$  в их серединах – точках  $K$ ,  $L$ ,  $M$  соответственно.

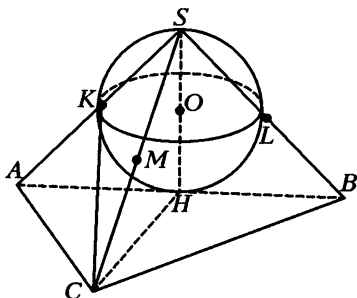


Рис. 49

Из условия касания сферы с плоскостью  $ABC$  следует, что  $AH \perp SH$ ,  $BH \perp SH$ ,  $CH \perp SH$ . Значит, треугольники  $AHS$ ,  $BHS$  и  $CHS$  прямоугольные. Отрезки  $OK$ ,  $OL$ ,  $OM$  являются их средними линиями. Следовательно,  $AH = 2OK = 2R$ ,  $BH = 2R$ ,  $CH = 2R$ . По теореме Пифагора находим, что  $SA = SB = SC = 2R\sqrt{2}$ .

Предположим, что  $H \in BC$ . Тогда получаем, что в треугольнике  $ABC$  медиана  $AH$  равна половине той стороны, к которой она проведена. Отсюда следует, что треугольник  $ABC$  – прямоугольный с прямым углом при вершине  $A$ , т.е. отрезок  $BC$  является его самой длинной стороной, что противоречит условию. Аналогично доказывается, что  $H$  не может принадлежать  $AC$ . Поэтому  $H \in AB$ . Значит,  $AB = AH + HB = 4R = 12$ ,  $\angle ACB = 90^\circ$ .

б) Прямые  $CH$  и  $CK$  – это две касательные к сфере, проведенные из одной точки. Следовательно,  $CK = CH = 2R$ . По формуле для медианы в треугольнике  $SAC$  получаем уравнение  $4KC^2 + SA^2 = 2SC^2 + 2AC^2$ , т.е.  $16R^2 + 8R^2 = 2 \cdot 8R^2 + 2BC^2$ , откуда  $AC = 2R$ . По теореме Пифагора из треугольника  $ABC$  находим, что  $BC = 2R\sqrt{3}$ . Значит, объем пирамиды  $V$  равен

$$\frac{1}{3} \cdot 2R \cdot \frac{1}{2} \cdot 2R \cdot 2R\sqrt{3} = \frac{4R^3}{\sqrt{3}} = 36\sqrt{3}.$$

**Вариант 4**

$$1. (1; -1), (-2; 1), \left( \sqrt{5} - 1; \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right), \left( -\sqrt{5} - 1; \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right).$$

$$2. x = -\frac{\pi}{6} + \pi k, k \in \mathbb{Z}.$$

$$3. x = 7.$$

$$4. AB = 2, \angle BAD = 2 \operatorname{arctg} 3 = \pi - \arccos \frac{4}{5}, S = \frac{192}{25}.$$

$$5. 1680.$$

$$6. x \in \left[ -5; -\frac{3\pi}{2} \right) \cup \left( -\frac{3\pi}{2}; -2 \right) \cup \left\{ -\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}; 3 \right\}.$$

$$7. AC = 12, \angle ABC = 90^\circ, V = 36\sqrt{3}.$$

**ФИЗИКА**

**Вариант 1**

1. 1) По закону сохранения импульса в инерциальной системе отсчета (ИСО), связанной с тележкой,

$$m(51u - u) = (24m + m)v_1.$$

Отсюда находим

$$v_1 = 2u = 2 \text{ м/с}.$$

2) Скорость шара относительно пола равна

$$v_2 = v_1 + u = 3u = 3 \text{ м/с}.$$

3) По закону сохранения энергии в ИСО, связанной с тележкой,

$$\frac{(24m + m)v_1^2}{2} = (24m + m)g(l - l \cos \alpha).$$

Отсюда получаем

$$\cos \alpha = 1 - \frac{2u^2}{gl} \approx 0,6, \text{ и } \alpha = \arccos 0,6.$$

**Замечание.** При формальном применении закона сохранения энергии в ИСО, связанной с полом, получается типичный

ошибочный ответ:  $\cos \alpha = 1 - \frac{4u^2}{gl} \approx 0,2!$

2. Пусть 1-2 – изотерма, 2-3 – изохора, 3-1 – адиабата. Введем обозначения:  $A_{12}$  – работа газа на изотерме,  $A_{31}$  – работа газа на адиабате,  $A$  – работа газа за цикл,  $Q_{12}$  – количество теплоты, полученное газом на изотерме. Тогда  $-A_{31}$  – работа над газом при сжатии.

1) По условию,

$$A_{12} + A_{31} = A, \quad A_{12} = 10A.$$

Отсюда находим

$$\frac{A_{12}}{-A_{31}} = \frac{10}{9}.$$

2) КПД цикла равен

$$\eta = \frac{A}{Q_{12}} = \frac{A}{A_{12}} = \frac{A}{10A} = \frac{1}{10}, \text{ или } \eta = 10\%.$$

3. 1) Напряженность поля в конденсаторе равна

$$E = \frac{U_0}{d},$$

напряженность поля, создаваемого зарядом одной обкладки, равна

$$\frac{E}{2} = \frac{U_0}{2d}.$$

Заряд конденсатора равен

$$Q = C_0 U_0.$$

Сила притяжения обкладок равна

$$F = Q \frac{E}{2} = \frac{C_0 U_0^2}{2d}.$$

2) При раздвигании обкладок сила притяжения не будет изменяться, так как не изменяется поле между обкладками. Поэтому работа равна

$$A = F \frac{d}{3} = \frac{C_0 U_0^2}{6}.$$

4. 1) При максимальном токе  $I_m$  ЭДС индукции в катушке равна нулю. Тогда напряжение на конденсаторе равно  $\mathcal{E}$ , левая обкладка имеет заряд  $C\mathcal{E}$ . Работа источника равна

$$A = (C\mathcal{E} - 4C\mathcal{E})\mathcal{E} = -3C\mathcal{E}^2.$$

Изменения энергий конденсатора и катушки равны, соответственно,

$$\Delta W_C = \frac{C\mathcal{E}^2}{2} - \frac{C(4\mathcal{E})^2}{2} = -\frac{15}{2}C\mathcal{E}^2, \quad \Delta W_L = \frac{LI_m^2}{2} - 0 = \frac{LI_m^2}{2}.$$

По закону сохранения энергии,

$$A = \Delta W_C + \Delta W_L.$$

Отсюда получаем

$$I_m = 3\varepsilon \sqrt{\frac{C}{L}}.$$

2) По закону сохранения энергии от момента замыкания ключа до момента равенства нулю заряда конденсатора:

$$(0 - 4C\varepsilon)\varepsilon = \left(0 - \frac{C(4\varepsilon)^2}{2}\right) + \left(\frac{LI^2}{2} - 0\right)$$

находим искомый ток:

$$I = 2\varepsilon \sqrt{\frac{2C}{L}}.$$

5. 1) Из формулы линзы

$$\frac{1}{d} + \frac{1}{f} = \frac{1}{F},$$

где  $d \doteq \frac{7}{5}F$ , получаем, что изображение мухи находится на расстоянии

$$f = \frac{7}{2}F.$$

2) Пусть луч, направленный вдоль скорости мухи, пересекает линзу на расстоянии  $H$  от оптического центра линзы. Этот луч, преломившись в линзе, идет в направлении движения изображения мухи под углом  $\beta$  к главной оптической оси линзы. Тогда

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{H}{f}, \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{H}{d}.$$

Отсюда получаем

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{d}{f} \operatorname{tg} \alpha = \frac{8}{15}, \quad \text{или} \quad \beta = \arctg \frac{8}{15}.$$

3) Можно показать, что отношение проекций скоростей изображения и предмета на ось, направленную вдоль главной оптической оси линзы, равно  $\Gamma^2$ , где  $\Gamma = \frac{f}{d}$  – поперечное увеличение. Таким образом,

$$\frac{u \cos \beta}{v \cos \alpha} = \Gamma^2.$$

Отсюда находим

$$u = \Gamma^2 v \frac{\cos \alpha}{\cos \beta} = \left(\frac{5}{2}\right)^2 v \frac{3/5}{15/17} = \frac{17}{4} v.$$

# НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ «МИЭТ»

## ФИЗИКА

Интернет-олимпиада «Поверь в себя!»

Задачи первого тура

- 2,5 круга.
- $t_c = 45^\circ\text{C}$  (см. рис.50).

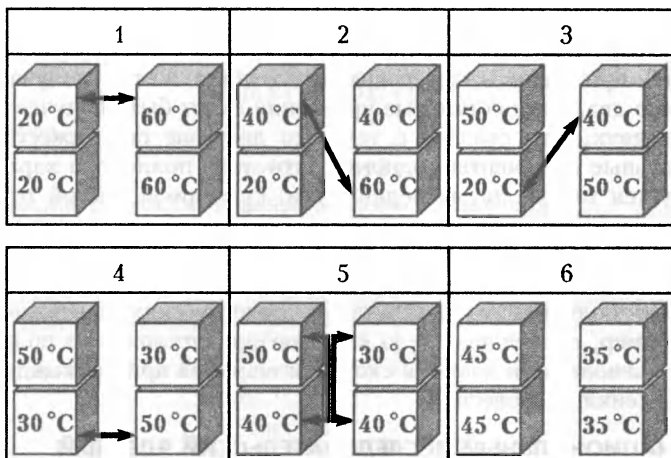


Рис. 50

- Шарика С.
- 5 резисторов.

Задачи заключительного тура

- Ответ В.
- График 2.
- Ответ Г.
- 3 измерения.
- В случае 1 или 5.
- $N_2 = 240$ .

7. В системе отсчета  $x'O'y'$  механическая энергия шайбы действительно не сохраняется, а ее приращение равно работе внешней силы – силы реакции опоры, которая действует на шайбу со стороны горки. В «неподвижной» системе отсчета  $xOy$  эта сила реакции в любой момент времени перпендикулярна

скорости шайбы, поэтому ее работа равна нулю, и механическая энергия сохраняется, а в «подвижной» системе отсчета  $x'O'y'$  сила реакции составляет с вектором скорости шайбы тупой угол, работа этой силы отрицательна, вследствие чего механическая энергия шайбы уменьшается.

8. Многие участники олимпиады находили три неизвестные массы по результатам измерений сил, действующих на тело в положении равновесия. Эти участники действовали по существу так: подвешивали тела, измеряли силы натяжения, затем меняли точку подвеса и вновь измеряли силы натяжения. Предполагалось, что полученных при этом уравнений достаточно для определения трех неизвестных масс. Однако независимых уравнений при таких статических измерениях всегда получается только два, а все остальные уравнения могут быть получены из этих двух. Это связано с тем, что действие сил тяжести на отдельные фрагменты «одномерного» тела полностью характеризуется только двумя величинами: суммарной массой тела и координатой центра масс. Поэтому для определения трех неизвестных масс одних статических измерений недостаточно, они дают только два независимых уравнения. Еще одно уравнение можно получить по результатам динамических измерений – например, подвешивая тело как маятник, отклоняя от положения равновесия и измеряя скорости шариков при прохождении положения равновесия.

## НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ЯДЕРНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ «МИФИ»

*Заключительный тур*

### МАТЕМАТИКА

$$1. \quad x = \frac{1}{4} \arccos\left(-\frac{3}{4}\right) + \frac{\pi k}{2}, \quad k \geq 0, \quad k \in \mathbb{Z},$$

$$x = -\frac{1}{4} \arccos\left(-\frac{3}{4}\right) + \frac{\pi k}{2}, \quad k \geq 1, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

При  $x \leq 0$  решений нет. При  $x > 0$  имеем

$$\lg|\sin 2x| + \lg|\sin 10x| = 2 \lg|\sin 6x| \Rightarrow |\sin 2x \cdot \sin 10x| = \sin^2 6x.$$

Возможны два случая.

Если  $\sin 2x \sin 10x > 0$ , получим

$$\sin 2x \sin 10x = \sin^2 6x,$$

откуда

$$\cos 8x - \cos 12x = 1 - \cos 12x$$

и

$$x = \frac{\pi k}{4}.$$

Тогда

$$2x = \frac{\pi k}{2}, \quad 6x = \frac{3\pi k}{2}, \quad 10x = \frac{5\pi k}{2}.$$

При четных  $k$  такие  $x$  не принадлежат ОДЗ, при нечетных  $k$  — все члены прогрессии нулевые.

Если же  $\sin 2x \sin 10x < 0$ , получим

$$-\sin 2x \sin 10x = \sin^2 6x,$$

откуда

$$2\cos 12x - \cos 8x - 1 = 0.$$

Заменой  $t = \cos 4x$  уравнение приводится к виду

$$t(4t^2 - t - 3) = 0,$$

откуда  $t = 0$ ,  $t = 1$ ,  $t = -3/4$ .

Для  $t = 0$  имеем

$$\cos 4x = 0 \Rightarrow 4x = \frac{\pi}{2} + \pi k \Rightarrow 2x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}, \quad 6x = \frac{3\pi}{4} + \frac{3\pi k}{2},$$

$$10x = \frac{5\pi}{4} + \frac{5\pi k}{2}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

При всех  $k$  члены прогрессии одинаковые и равны  $\lg \frac{\sqrt{2}}{2}$ , поэтому такие  $x$  не являются решениями.

При  $t = 1$ :

$$\cos 4x = 1 \Rightarrow 4x = 2\pi m \Rightarrow x = \frac{\pi m}{2}$$

(серия недопустима:  $\sin 2x = 0$ ).

При  $t = -3/4$ :

$$\cos 4x = -\frac{3}{4},$$

и

$$x_1 = \frac{1}{4} \arccos(-3/4) + \frac{\pi}{2} n, \quad x_2 = -\frac{1}{4} \arccos(-3/4) + \frac{\pi}{2} n.$$

Осталось проверить условие  $\sin 2x_1 \cdot \sin 10x_1 < 0$ :

$$\sin 2x = (-1)^k \sin \left( \frac{1}{2} \arccos \left( -\frac{3}{4} \right) \right),$$



$$\sin 10x = (-1)^k \sin \left( \frac{5}{2} \arccos \left( -\frac{3}{4} \right) \right),$$

тогда

$$\begin{aligned} \sin 2x \cdot \sin 10x &= \sin \left( \frac{1}{2} \arccos \left( -\frac{3}{4} \right) \right) \cdot \sin \left( \frac{5}{2} \arccos \left( -\frac{3}{4} \right) \right) = \\ &= \frac{1}{2} \left( \cos 2 \arccos \left( -\frac{3}{4} \right) - \cos 3 \arccos \left( -\frac{3}{4} \right) \right), \end{aligned}$$

и если  $t = \cos \left( \arccos \left( -\frac{3}{4} \right) \right) = -\frac{3}{4}$ , то

$$\begin{aligned} \sin 2x_1 \cdot \sin 10x_1 &= -\frac{1}{2}(t-1)(4t^2+2t-1) = \\ &= -\frac{1}{2} \cdot \left( -\frac{7}{4} \right) \cdot \left( -\frac{1}{4} \right) = -\frac{7}{32} < 0. \end{aligned}$$

$$2. \quad l = \frac{\pi}{3}.$$

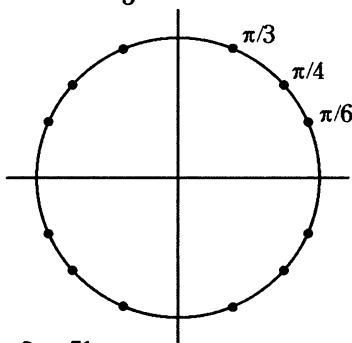


Рис. 51

Заменой  $t = \sin^2 x \geq 0$  получим кубическое уравнение  $32t^3 - 48t^2 + 22t - 3 = 0$ ; оно имеет решения  $t = 1/2$ ,  $t = 3/4$ ,  $t = 1/4$ , откуда  $\sin x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$ ,  $\pm \frac{\sqrt{3}}{2}$ ,  $\pm \frac{1}{2}$ . На рисунке 51 показаны соответствующие точки единичного круга.

$$\text{Отсюда } l = \frac{\pi}{3}.$$

$$3. \quad x^2 + y^2 = 13.$$

Преобразуем систему:

$$\begin{cases} \frac{(x+y)(x^2-xy+y^2)}{x^2+y^2} = \frac{35}{13}, \\ x+y=5, \end{cases} \quad \begin{cases} 13(x^2-xy+y^2) = 7(x^2+y^2), \\ x^2+y^2 = 25-2xy. \end{cases}$$

Введем обозначения:

$$\begin{cases} R^2 = x^2 + y^2, \\ u = xy \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 13(R^2 - u) = 7R^2, \\ R^2 = 25 - 2u \end{cases} \Rightarrow R^2 = 13.$$

Отсюда  $x^2 + y^2 = 13$ .

4. 16 минут.

Номера минут, когда говорит папа:  $N = 7k + 4$  – серия 1,  $N = 7k + 5$  – серия 2,  $N \in [1; 120]$ .

Номера минут, когда говорит мама:  $N = 5m + 1$  – серия A,  $N = 5m + 2$  – серия B,  $N = 5m + 3$  – серия C,  $N \in [1; 120]$ .

Номера минут, когда оба говорят в сериях:

$$1, A: N = 7k + 4 = 5m + 1 \Rightarrow 7k - 5m = -3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} k = -4 + 5t, \\ m = -5 + 7t, \end{cases} t \in \mathbb{Z} \Rightarrow N = 7(5t - 4) + 4 = 35t - 24.$$

Получаем  $N = 11, 46, 81, 116$ . В эти минуты сын молчал, поскольку остатки от деления этих чисел на 9 не равны 3 или 4.

1, B:

$$N = 7k + 4 = 5m + 2 \Rightarrow 7k - 5m = -2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} k = -1 + 5t, \\ m = -1 + 7t, \end{cases} t \in \mathbb{Z} \Rightarrow N = 7(5t - 1) + 4 = 35t - 3.$$

Отсюда  $N = 32, 67, 102$ . На 67 и 102 минутах сын говорил, поскольку остатки от деления этих чисел на 9 равны 3 или 4. От этого варианта осталась только одна 32-я минута.

1, C:

$$N = 7k + 4 = 5m + 3 \Rightarrow 7k - 5m = -1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} k = -3 + 5t, \\ m = -4 + 7t, \end{cases} t \in \mathbb{Z} \Rightarrow N = 7(5t - 3) + 4 = 35t - 17.$$

Здесь  $N = 18, 53, 88$ . В эти минуты сын молчал, поскольку остатки от деления этих чисел на 9 не равны 3 или 4.

2, A:

$$N = 7k + 5 = 5m + 1 \Rightarrow 7k - 5m = -4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} k = -2 + 5t, \\ m = -2 + 7t, \end{cases} t \in \mathbb{Z} \Rightarrow N = 7(5t - 2) + 5 = 35t - 9.$$

В этом случае  $N = 26, 61, 96$ . В эти минуты сын молчал, поскольку остатки от деления этих чисел на 9 не равны 3 или 4.

2, B:

$$N = 7k + 5 = 5m + 2 \Rightarrow 7k - 5m = -3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} k = -4 + 5t, \\ m = -5 + 7t, \end{cases} t \in \mathbb{Z} \Rightarrow N = 7(5t - 4) + 5 = 35t - 23.$$

Тогда  $N = 12, 47, 82, 117$ . На 12-й минуте сын говорил, поскольку остаток от деления 12 на 9 равен 3. На остальных минутах этой серии сын молчал.

2, С:

$$N = 7k + 5 = 5m + 3 \Rightarrow 7k - 5m = -2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} k = -1 + 5t, \\ m = -1 + 7t, \end{cases} t \in \mathbb{Z} \Rightarrow N = 7(5t - 1) + 5 = 35t - 2.$$

Имеем  $N = 33, 68, 103$ . На 33-й и 68-й минутах сын молчал, поскольку остатки от деления этих чисел на 9 не равны, 3 или 4, а на 103 – говорил, поскольку остаток от деления 103 на 9 равен 4.

Итак, всего 16 минут в течении двух часов папа и мама говорили одновременно, а сын при этом молчал.

$$5. a \in \left[-\pi; -\frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right]$$

Решение второго уравнения в системе:

$$\sin x = \sin(x + 2y) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = x + 2y + 2\pi k, \\ x = \pi - x - 2y + 2\pi m, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = -\pi k, \\ x + y = \frac{\pi}{2} + \pi m, \end{cases} k, m \in \mathbb{Z}.$$

На рисунке 52 жирной линией изображены решения уравнения в квадрате.

Единственному решению системы соответствуют значения  $a$ , при которых прямая  $y = x - a$  пересечет жирную линию ровно один раз. Это бывает при  $a \in \left[-\pi; -\frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right]$ .

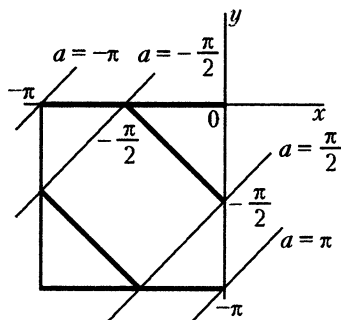


Рис. 52

6.  $BN : NC = 1 : 5$ .

Во-первых, докажем, что  $ABCD$  на самом деле прямоугольник. Введем обозначения, как

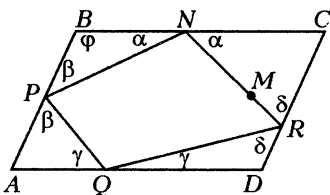


Рис. 53

показано на рисунке 53. Получим

$$\beta = 180^\circ - \alpha - \varphi,$$

$$\gamma = 180^\circ - \beta - (180^\circ - \varphi) = \varphi - \beta = 2\varphi + \alpha - 180^\circ,$$

$$\delta = 180^\circ - \gamma - \varphi = 360^\circ - 3\varphi - \alpha.$$

Но

$$\delta = 180^\circ - \alpha - (180^\circ - \varphi) = \varphi - \alpha$$

и

$$\varphi - \alpha = 360^\circ - 3\varphi - \alpha \Rightarrow 4\varphi = 360^\circ \Rightarrow \varphi = 90^\circ.$$

Во-вторых,  $MN$  параллельна  $BD$  (рис.54). Здесь  $a$ ,  $b$  – стороны

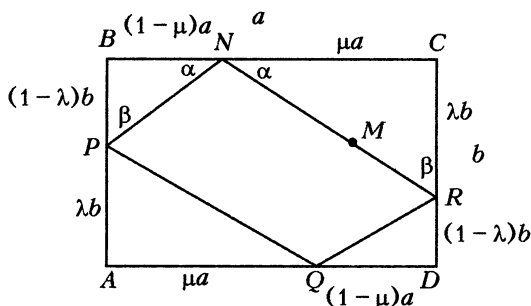


Рис. 54

прямоугольника,  $CN = \mu a$ ,  $AP = \lambda b$ . Тогда из подобия  $\triangle RCN \sim \triangle PBN$  получим  $\frac{\lambda b}{\mu a} = \frac{(\lambda - 1)b}{(\mu - 1)a} \Rightarrow \lambda = \mu$ . Значит,  $RN \parallel BD$  и  $NP \parallel QR$ .

Осталось вычислить отношение  $BN : NC$  (рис.55). Имеем:

$$\frac{BN}{NC} = \frac{KM}{MC} \quad (\text{теорема Фалеса}),$$

$$\frac{KM}{MC} \cdot \frac{CF}{FD} \cdot \frac{DB}{BK} = 1 \quad (\text{теорема}$$

Менелая для  $\triangle KCD$  и секущей  $FB$ ).

По условию задачи

$$\frac{KM}{MC} \cdot \frac{3r}{r} \cdot \frac{5s}{3s} = 1, \quad \text{откуда}$$

$$BN : NC = KM : MC = 1 : 5.$$

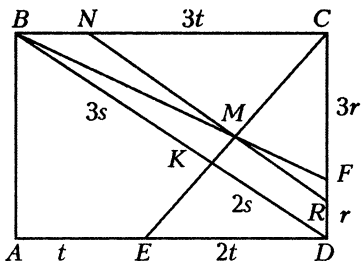


Рис. 55

## ФИЗИКА

1. Пусть расстояние  $AB$  равно  $x$ . Тогда очевидно, что сумма расстояний, пройденных машинами до первой встречи, равна  $x$ , а до второй встречи —  $3x$ . Действительно, до второй встречи каждая машина доедет до второго города (в сумме  $2x$ ) и проедет расстояние от него до места встречи с другой машиной. Поэтому, с одной стороны, машина, выехавшая из города  $A$ , пройдет до второй встречи расстояние  $3l$ , а с другой стороны, это расстояние равно расстоянию между городами плюс расстояние от города  $B$  до точки второй встречи. Отсюда получаем

$$3l = x + \frac{3}{4}l,$$

или

$$x = \frac{9}{4}l.$$

2. Найдем ускорение тела как функцию координаты. Для этого продифференцируем функцию  $v_x = \alpha\sqrt{x}$  по времени (считая, что  $x$  в этой зависимости — это функция времени, и используя правила дифференцирования сложных функций):

$$\frac{dv_x}{dt} = \frac{\alpha}{2\sqrt{x}} \frac{dx}{dt} = \frac{\alpha}{2\sqrt{x}} v_x = \frac{\alpha^2}{2v_x} v_x = \frac{\alpha^2}{2}.$$

Видим, что движение тела — равноускоренное, с нулевой начальной скоростью и ускорением

$$a = \frac{\alpha^2}{2}.$$

Поэтому зависимость координаты тела от времени (с учетом того, что тело в начале движения находится в начале координат) имеет вид

$$x = \frac{\alpha^2 t^2}{4}.$$

Отсюда находим искомое время:

$$\tau = \frac{2\sqrt{x_0}}{\alpha}.$$

3. Основная идея решения этой задачи заключается в том, чтобы подобрать такое распределение зарядов на полушарах, чтобы поле внутри них было равно нулю. Для этого должны быть выполнены два условия: а) на сферических поверхностях каждого полушара должны разместиться одинаковые заряды, б) на плоских поверхностях должны разместиться одинаковые по величине и противоположные по знаку заряды (рис.56). Действительно, поскольку поле зарядов, равномерно распределен-

ных по поверхности шара, равно нулю внутри шара, а поле двух пластинок, заряженных равными по величине и противоположными по знаку зарядами, равно нулю вне этих пластинок, то поле такого распределения зарядов будет удовлетворять нужным условиям. Поэтому оно и будет реализовываться.

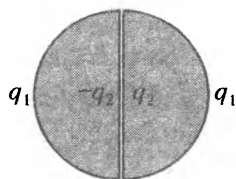


Рис. 56

Из закона сохранения заряда для зарядов  $q_1$  и  $q_2$  получаем

$$q_1 - q_2 = -Q,$$

$$q_1 + q_2 = 3Q,$$

откуда находим

$$q_1 = Q, \quad q_2 = 2Q.$$

Поле в зазоре находим как поле двух плоскостей, заряженных равными по величине и противоположными по знаку зарядами:

$$E = \frac{q_2}{\epsilon_0 S} = \frac{2Q}{\epsilon_0 \pi R^2}.$$

Направлено поле в зазоре справа налево.

4. Пусть масса каждого поршня  $m$ , площадь сечения сосуда  $S$ . Тогда условия равновесия поршней в любой момент времени дают

$$p_v = \frac{mg}{S}, \quad p_n - p_v = \frac{mg}{S},$$

или

$$p_n = \frac{2mg}{S},$$

где  $p_n$  и  $p_v$  — давление газа в нижнем и верхнем отсеке соответственно. Закон Клапейрона–Менделеева для газов между поршнями и под нижним поршнем имеет вид

$$p_v \cdot 2hS = \nu_1 RT, \quad p_n hS = \nu_2 RT,$$

где  $\nu_1$  и  $\nu_2$  — количества вещества газа между поршнями и под нижним поршнем соответственно. Отсюда получим

$$2mgh = \nu_1 RT, \quad 2mgh = \nu_2 RT, \quad \text{или} \quad 4mgh = \nu RT,$$

где  $\nu$  — количество вещества газа во всем сосуде. С другой стороны, когда нижний поршень будет лежать на дне, условие равновесия верхнего поршня даст

$$mgH = \nu RT,$$

где  $H$  — высота верхнего поршня над дном сосуда (толщиной

поршня пренебрегаем). Отсюда находим

$$H = 4h.$$

5. Для системы двух шариков (двух точечных тел) внешними силами являются силы реакции стержней  $\vec{N}_1$  и  $\vec{N}_2$ , которые находятся из условия нулевых проекций ускорения шариков на направления, перпендикулярные стержням (рис.57). В начальный момент, когда отрезок, соединяющий шарики, составляет угол  $\alpha = \arctg(1/2)$  с горизонтальным стержнем, эти силы равны

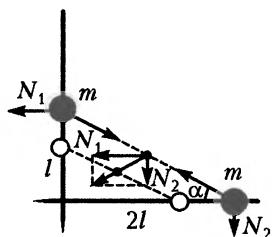


Рис. 57

$$N_1 = F \cos \alpha, \quad N_2 = F \sin \alpha.$$

Центр масс системы (находится посередине между шариками) движется так, как будто в нем сосредоточена вся масса системы  $2m$  и на него действует суммарная внешняя сила  $\vec{N}_1 + \vec{N}_2$ . Геометрически очевидно, что в начальный момент эта сила направлена в точку пересечения стержней. Это значит, что за некоторый малый интервал времени шарики переместятся так, что их центр масс сместится точно в направлении точки пересечения стержней. Иными словами, перемещения шариков за этот интервал будут такими, что соединяющий их отрезок будет все время оставаться параллельным самому себе и центр масс все время будет двигаться вдоль прямой, соединяющей его начальное положение и точку пересечения стержней. Следовательно, шарики попадут в эту точку одновременно.

Время движения шариков можно найти так. Поскольку отрезок, соединяющий шарики, все время остается параллельным самому себе, проекция силы взаимодействия шариков на направление стержней не меняется. Поэтому движение шариков равноускоренное. Применяя закон равноускоренного движения, например, к нижнему шарiku, получим

$$2l = \frac{at^2}{2},$$

где

$$a = \frac{F \cos \alpha}{m} = \frac{2F}{\sqrt{5}m}$$

— ускорение нижнего шарика. Отсюда находим

$$t = \sqrt{\frac{2\sqrt{5}lm}{F}}.$$

# НОВОСИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

## ФИЗИКА

### Письменный экзамен

#### Вариант 1

1. Средняя скорость при равноускоренном движении равна полусумме начальной и конечной скоростей, поэтому при разгоне и торможении она равна  $60/2 \text{ км/ч} = 30 \text{ км/ч}$ . Следовательно, полный пройденный путь равен

$$30 \text{ км/ч} \cdot \frac{1}{60} \text{ ч} + 60 \text{ км/ч} \cdot \frac{2}{60} \text{ ч} + 30 \text{ км/ч} \cdot \frac{1}{60} \text{ ч} = 3 \text{ км}.$$

2. Пусть объем стакана равен  $V$ . При смешивании одинаковых жидкостей плотностью  $\rho$  и теплоемкостью  $c$ , занимающих одинаковые объемы  $V/2$  и нагретых до температур  $T_1$  и  $T_2$  соответственно, температура  $T$  смеси определяется законом сохранения количества теплоты:

$$c\rho\left(\frac{V}{2} + \frac{V}{2}\right)T = c\rho\frac{V}{2}T_1 + c\rho\frac{V}{2}T_2.$$

Отсюда получим

$$T = \frac{T_1 + T_2}{2}.$$

После того как воду из сосуда обратно разольют по стаканам, температура воды в них станет

$$T'_1 = \frac{T_1 + T}{2} \text{ и } T'_2 = \frac{T_2 + T}{2}.$$

соответственно. Тогда искомая разница температур  $\Delta T'$  будет равна

$$\Delta T' = T'_1 - T'_2 = \frac{T_1 - T_2}{2} = \frac{\Delta T}{2}.$$

3. Пусть заряд бусинки равен  $q$ . Обозначим искомый угол  $ABC$  через  $\alpha$  (рис.58). На бусинку действуют кулоновские силы отталкивания от зарядов  $q_1$  и  $q_2$ :

$$F_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q}{AC^2}, \quad F_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_2 q}{BC^2},$$

а также сила реакции со стороны кольца  $N$ , направленная к центру  $O$  кольца. Поскольку бусинка находится в равновесии, то

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{N} = 0,$$

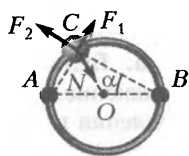


Рис. 58



или

$$F_1 \cos \alpha - F_2 \sin \alpha = 0 .$$

Отсюда найдем

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{F_2}{F_1} = \frac{q_2}{q_1} \operatorname{tg}^2 \alpha , \text{ или } \operatorname{tg}^3 \alpha = \frac{q_1}{q_2} .$$

Окончательно получим

$$\angle ABC = \arctg \sqrt[3]{\frac{q_1}{q_2}} .$$

4. При движении перемычки со скоростью  $v$  в контуре возникает ЭДС индукции

$$\mathcal{E}_i = -\frac{\Delta \Phi}{\Delta t} = -Blv \cos \alpha ,$$

где  $\Phi$  – магнитный поток. Сила Ампера, действующая на перемычку, по модулю равна

$$F_A = IBl$$

и направлена перпендикулярно перемычке под углом  $\alpha$  к скорости, а ток в цепи равен

$$I = \frac{\mathcal{E} + \mathcal{E}_i}{R} .$$

Равномерное движение перемычки достигается при равенстве действующих на нее сил (силы Ампера, силы тяжести, силы реакции опоры и силы трения). В проекции на вертикальную плоскость это равенство дает

$$N = mg - F_A \sin \alpha ,$$

а в проекции на плоскость рельсов получаем

$$F_A \cos \alpha = \mu N = \mu (mg - F_A \sin \alpha) .$$

Выражение в скобках больше нуля, так как, по условию, перемычка не отрывается от рельсов ( $N > 0$ ). Из последнего уравнения с учетом предыдущих находим

$$\mathcal{E} = vBl \cos \alpha + \frac{\mu mg R}{Bl(\cos \alpha + \mu \sin \alpha)} .$$

5. Будем считать, что вся вода из ковша испарилась. Тогда изменение давления в парной будет определяться изменением давления водяного пара. Полагая объем парной  $V \approx 100 \text{ м}^3$ , из уравнения Менделеева–Клапейрона для водяного пара ( $\Delta m$  – масса воды в ковше,  $\Delta p$  – изменение давления,  $M$  – молярная

масса воды,  $T$  – температура пара) получим

$$\Delta p V = \frac{\Delta m}{M} RT, \text{ или } \Delta p = \frac{\Delta m}{M} \frac{RT}{V}.$$

Подставив численные значения:  $\Delta m = 1$  кг,  $T \approx 350$  К,  $M = 0,018$  кг/моль,  $V \approx 10^2$  м<sup>3</sup>,  $R = 8,31$  Дж/(моль · К), получим

$$\Delta p \approx 1,6 \cdot 10^3 \text{ Па} \approx 0,02 \text{ атм}.$$

### *Олимпиада школьников «Будущее Сибири»*

#### *I (отборочный) этап*

##### 8 класс

1. Пусть  $V$  – объем шара, тогда сила тяжести, действующая на шар, направлена вертикально вниз и равна

$$F_T = \rho V g,$$

а сила Архимеда, действующая на шар, погруженный в воду, направлена вертикально вверх и равна

$$F_A = \rho_0 V g.$$

В равновесии

$$\rho V g = 2\rho V g - 2\rho_0 V g,$$

откуда получим

$$\rho = 2\rho_0 = 2000 \text{ кг/м}^3.$$

2. Из условия теплового баланса

$$c_B m_B (t_B - t_0) + \lambda m = c_L m_L (t_0 - t_L),$$

где  $t_0 = 0$  °С – температура плавления льда, находим начальную температуру льда:

$$t_L = t_0 - \frac{c_B m_B (t_B - t_0) + \lambda m}{c_L m_L} = -50,34 \text{ °С}.$$

3. Относительная скорость велосипедистов равна либо

$$v_1 = \frac{15 \text{ км} + 9 \text{ км}}{2 \text{ ч}} = 12 \text{ км/ч},$$

если они встретились в промежутке между 13-ю и 15-ю часами, либо

$$v_2 = \frac{15 \text{ км} - 9 \text{ км}}{2 \text{ ч}} = 3 \text{ км/ч}$$

– в противном случае. В 16 часов расстояние между велосипедистами равно  $9 \text{ км} + 12 \text{ км/ч} \cdot 1 \text{ ч} = 21 \text{ км}$  в первом случае и

$|9 \text{ км} - 3 \text{ км/ч} \cdot 1 \text{ ч}| = 6 \text{ км}$  – во втором. Таким образом, только первый случай удовлетворяет условию задачи. Время встречи в этом случае равно

$$t = 13 \text{ ч} + \frac{15 \text{ км}}{12 \text{ км/ч}} = 14 \text{ ч } 15 \text{ мин}.$$

4. Система будет находиться в равновесии, если момент силы тяжести пластинки относительно левого верхнего угла нижнего кубика не превысит момента силы тяжести верхнего кубика относительно той же точки:

$$Mg \left( \frac{L}{2} - a \right) \leq mg \frac{a}{2},$$

откуда следует

$$m \geq M \frac{L - 2a}{a}, \text{ или } m_{\min} = M \frac{L - 2a}{a}.$$

9 класс

1. К левому плечу весов приложена сила, равная силе тяжести, действующей на шарик:

$$F_1 = \rho V g,$$

где  $V$  – объем шарика,  $\rho$  – искомая плотность. К правому плечу весов приложена сила, равная алгебраической сумме силы тяжести и выталкивающей силы Архимеда:

$$F_2 = \rho V g - \rho_0 V g.$$

Из условия равновесия весов

$$F_1 \cdot l_1 = F_2 \cdot l_2$$

найдем

$$\rho = \frac{l_2}{l_2 - l_1} \rho_0.$$

2.  $t = 9 \text{ ч } 45 \text{ мин}$  (подробнее см. задачу 3 для 8 класса).

3.  $M_{\max} = m \frac{a}{L - 2a}$  (подробнее см. задачу 4 для 8 класса).

4. Обозначим начальное расстояние через  $a$ , а искомое расстояние до стены в конечной точке – через  $x$ . Траектория мяча после упругого отражения от стены является зеркальным отражением траектории, по которой летел бы мяч в отсутствие стены (рис.59). Проекция наивысшей точки траектории на горизонтальную ось, по условию, совпадает с начальной точкой  $A$  траектории. Зеркально симметричная ей точка  $B$  соответствует наивысшей точке зеркально отраженной траектории и находится

на расстоянии  $AB = 2a$  от начальной. Конечная же точка  $C$  этой траектории лежит на расстоянии  $AC = x + a$  от начальной. Наивысшая точка, как известно, делит траекторию пополам, поэтому

$$2a = \frac{x+a}{2}, \text{ или } x = 3a = 14 \text{ м.}$$

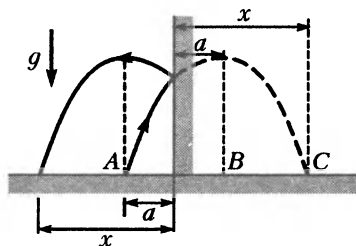


Рис. 59

10 класс

1. Исходное сопротивление  $R$  между точками  $A$  и  $B$  состоит из двух одинаковых параллельно соединенных сопротивлений полуокружностей  $ACB$  и  $ADB$ , поэтому сопротивление каждой полуокружности равно  $2R$ . Поскольку проволока однородна, сопротивление дуг окружностей  $AC$ ,  $BD$ ,  $AD$  и  $BC$  равны, соответственно,

$$R_{AC} = R_{BD} = 2R \frac{45^\circ}{180^\circ} = \frac{1}{2} R,$$

$$R_{AD} = R_{BC} = 2R \frac{135^\circ}{180^\circ} = \frac{3}{2} R.$$

После соединения точек  $C$  и  $D$  перемычкой эквивалентная электрическая схема принимает вид, изображенный на рисунке 60. Сопротивление

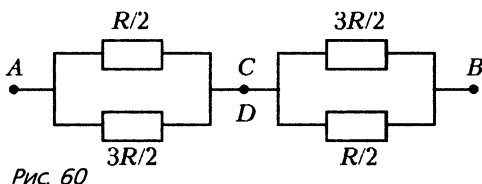


Рис. 60

между точками  $A$  и  $B$  этой схемы равно

$$R_{AB} = 2 \frac{R_{AC} R_{AD}}{R_{AC} + R_{AD}} = \frac{3}{4} R.$$

2. Так как максимальная масса, которую может поднять Ворона, равна  $m_1$ , то подъемная сила Вороны равна:

$$F_B = m_1 g + m_3 g.$$

Запишем второй закон Ньютона для Вороны, которая держит кусок сыра массой  $m_2$  и движется вверх:

$$(m_1 + m_2) a = F_B - (m_1 + m_2) g,$$

где  $a$  — ускорение Вороны с куском сыра. Время, за которое Ворона доберется до вершины ели, двигаясь с этим ускорением,

равно

$$t = \sqrt{\frac{2h}{a}}.$$

Отсюда найдем

$$t = \sqrt{\frac{2h}{g} \frac{m_1 + m_2}{m_3 - m_2}} = 3 \text{ с}.$$

3. Пусть  $T$  – сила натяжения нити. Тогда для левой бусинки

$$ma = mg \sin \alpha - T,$$

для правой

$$ma = T,$$

откуда

$$a = \frac{g}{2} \sin \alpha.$$

Правая бусинка пройдет путь

$$L = \frac{at^2}{2}.$$

Отсюда получим

$$t = 2 \sqrt{\frac{L}{g \sin \alpha}}.$$

4. Силы натяжения пружины в случаях 1 и 2 отличаются на силу Архимеда, равную  $\rho_0 V g$ , где  $V$  – объем шарика. С учетом закона Гука это означает, что

$$k(l_2 - l_1) = \rho_0 V g,$$

где  $k$  – жесткость пружины. В случаях 1 и 3 силы натяжения пружины отличаются на удвоенный вес шарика, равный  $\rho V g$ :

$$k(l_3 - l_1) = 2\rho V g.$$

Отсюда получим

$$\rho = \frac{1}{2} \frac{l_3 - l_1}{l_2 - l_1} \rho_0.$$

11 класс

3. В равновесии сила, действующая на поршень, равна нулю. Запишем равенство сил, действующих на поршень в случае, когда на поршне находится 1, 2 и 3 грузика соответственно:

$$p_0 S + mg = p_1 S, \quad p_0 S + 2mg = p_2 S, \quad p_0 S + 3mg = p_3 S.$$

Здесь  $p_0$  – атмосферное давление,  $m$  – масса одной гири,  $S$  –

площадь поршня. При изотермическом процессе

$$p_1 V_1 = p_2 V_2 = p_3 V_3.$$

Отсюда получим

$$p_1 - p_2 = p_2 - p_3,$$

$$\frac{p_1}{p_2} + \frac{p_3}{p_2} = 2, \text{ или } \frac{V_2}{V_1} + \frac{V_2}{V_3} = 2.$$

Выражая отсюда искомое отношение  $V_3/V_2$  через данное по условию отношение  $V_1/V_2$ , найдем

$$\frac{V_3}{V_2} = \frac{1}{2 - (V_2/V_1)} = \frac{3}{4}.$$

4. Вначале сила трения, равная  $F_{\text{тр}} = \mu mg \cos \alpha$ , направлена против движения транспорта. При этом ускорение тела

$$a_1 = g(-\sin \alpha - \mu \cos \alpha) < 0.$$

После того как скорость тела уменьшится до скорости транспорта  $v$ , сила трения изменит знак, и ускорение станет

$$a_2 = g(-\sin \alpha + \mu \cos \alpha) < 0.$$

На первом этапе движения тело пройдет путь

$$L_1 = \frac{u^2 - v^2}{2g(\sin \alpha + \mu \cos \alpha)},$$

а на втором —

$$L_2 = \frac{v^2}{2g(\sin \alpha - \mu \cos \alpha)}.$$

Отсюда получаем

$$H = (L_1 + L_2) \sin \alpha = \frac{1}{2g} \left( \frac{u^2 - v^2}{1 + \mu \operatorname{ctg} \alpha} + \frac{v^2}{1 - \mu \operatorname{ctg} \alpha} \right).$$

*// (заключительный) этап*

8 класс

1. Пронумеруем спортсменов в том порядке, в котором они стартовали на Олимпиаде. Из условия задачи ясно, что первый спортсмен является самым медленным, а тридцатый — самым быстрым. Отсюда следует, что продолжительность финиша определяется именно этими спортсменами, в том числе и если бы они стартовали в обратном порядке. Если бы спортсмены стартовали одновременно, то продолжительность финиша определялась бы разностью времен прохождения дистанции первым и

тридцатым спортсменами  $\Delta t$ . Поскольку спортсмены стартовали с интервалом 0,5 мин, то продолжительность старта  $\Delta t_c = (30 - 1)0,5 \text{ мин} = 14,5 \text{ мин}$ , а продолжительность финиша

$$\Delta t_\Phi = \Delta t - \Delta t_c.$$

Если бы спортсмены стартовали в обратном порядке, то

$$\Delta t'_\Phi = \Delta t + \Delta t_c.$$

Из этих двух выражений находим

$$\Delta t'_\Phi = \Delta t_\Phi + 2\Delta t_c = 34 \text{ мин}.$$

2. Пусть  $S$  – площадь сечения стакана,  $h$  – глубина погружения стакана в воду,  $\rho_v$  и  $\rho_d$  – плотности воды и дерева. На стакан действуют сила тяжести, направленная вниз, и сила Архимеда, направленная вверх и равная весу вытесненной жидкости. Поскольку стакан находится в равновесии,

$$\rho_v (Sh)g = (m_0 + m)g.$$

Объем стакана вместе с водой состоит из объема самого стакана и объема налитой в него воды:

$$SH = \frac{m_0}{\rho_d} + \frac{m}{\rho_v}.$$

Отсюда находим

$$h = \frac{m_0 + m}{(\rho_v/\rho_d)m_0 + m} H = 7 \text{ см}.$$

3. Пусть объем пруда  $V$ , а объем воды, поступающей в пруд за сутки (поток воды),  $\Phi$ . Если пруд оставался пустым, то точно такой же поток воды  $\Phi$  вытекал из пруда. По условию, сток уменьшили в 4 раза и пруд заполнился на  $2/3$  объема за  $t = 16$  суток:

$$\left(\Phi - \frac{1}{4}\Phi\right)t = \frac{2}{3}V.$$

После того как сток полностью перекрыли, оставшаяся часть пруда заполнится за время  $t'$ :

$$\Phi t' = \left(V - \frac{2}{3}V\right).$$

Отсюда получим

$$t' = \frac{3}{8}t = 6 \text{ суток}.$$

4. Обозначим массу куска льда  $m_{\text{л}}$ , массу воды в стакане  $m_{\text{в}}$ , а начальную температуру льда  $t_{\text{л}}$ . Запишем уравнение теплового баланса для первого случая:

$$c_{\text{л}} m_{\text{л}} (t_0 - t_{\text{л}}) = \lambda m_{\text{в}} + c_{\text{в}} m_{\text{в}} (t_{\text{к}} - t_0)$$

и для второго случая:

$$\lambda (m_{\text{в}} + m_{\text{л}}) = c_{\text{в}} \cdot 8 m_{\text{в}} (t_{\text{к}} - t_0).$$

Отсюда находим

$$t_{\text{л}} = t_0 - \frac{\lambda}{c_{\text{л}}} \frac{c_{\text{в}} (t_{\text{к}} - t_0) + \lambda}{8 c_{\text{в}} (t_{\text{к}} - t_0) - \lambda} = -40^{\circ} \text{C}.$$

9 класс

$$1. \Delta t = \frac{l}{L - l} t = \frac{400 \text{ м}}{10000 \text{ м} - 400 \text{ м}} \cdot 13 \cdot 60 \text{ с} = 32,5 \text{ с}.$$

3. Запишем закон Ома для всех комбинаций идеальных источников напряжения и сопротивлений:

$$I_{11} = \frac{\mathcal{E}_1}{R_1}, \quad I_{21} = \frac{\mathcal{E}_2}{R_1}, \quad I_{12} = \frac{\mathcal{E}_1}{R_2}, \quad I_{22} = \frac{\mathcal{E}_2}{R_2}.$$

Видно, что последнее выражение можно получить, используя три предыдущих:

$$I_{22} = \frac{I_{12} I_{21}}{I_{11}} = 6 \text{ А}.$$

4. Обозначим жесткость второй пружины  $k$ , тогда жесткость первой пружины будет  $2k$ . После увеличения массы груза пружины растянулись дополнительно на одинаковую величину  $x$ . Тогда

$$F'_1 = F_1 + (2k)x,$$

$$F'_2 = F_2 + kx,$$

где  $F'_1, F'_2$  – новые показания динамометров. Поскольку масса груза удвоилась, то

$$F'_1 + F'_2 = 2(F_1 + F_2).$$

Отсюда получим

$$F'_1 = F_1 + \frac{2}{3}(F_1 + F_2) = 4 \text{ Н},$$

$$F'_2 = F_2 + \frac{1}{3}(F_1 + F_2) = 5 \text{ Н}.$$

5. Во время работы двигателя на пирата действуют сила тяжести и сила тяги двигателя, направленная под оптимально



выбранным углом к силе тяжести. Поэтому, пират будет лететь с ускорением

$$\vec{a} = \vec{g}_Л + \frac{\vec{F}}{m}$$

и пролетит расстояние

$$s = \frac{at^2}{2},$$

которое будет тем больше, чем больше  $a$ . Обозначим угол между  $\vec{g}_Л$  и  $\vec{a}$  через  $\alpha$ . Тогда получим квадратное уравнение

$$\frac{F^2}{m^2} = (\vec{a} - \vec{g}_Л)^2 = a^2 + g_Л^2 - 2ag_Л \cos \alpha,$$

откуда найдем

$$a = g_Л \cos \alpha \pm \sqrt{g_Л^2 \cos^2 \alpha + \frac{F^2}{m^2} - g_Л^2}.$$

Из полученного выражения видно, что максимально возможное значение  $a$  соответствует углу  $\alpha = \pi/2$ , т.е. пират должен лететь *горизонтально*. И для максимальной дальности получим

$$s = \frac{t^2}{2} \sqrt{\frac{F^2}{m^2} - g_Л^2}.$$

10 класс

**3.** Пусть  $m_1$  и  $m_2$  – массы правого и левого шариков соответственно, а  $E$  – упругая энергия, запасенная в сжатой пружине. В первом случае вся упругая энергия переходит в кинетическую энергию правого шарика:

$$E = \frac{m_1 v_1^2}{2}.$$

Аналогично, во втором случае

$$E = \frac{m_2 v_2^2}{2}.$$

В третьем случае упругая энергия перераспределяется между двумя шариками:

$$E = \frac{m_1 v_1'^2}{2} + \frac{m_2 v_2'^2}{2},$$

где  $v_1'$  и  $v_2'$  – искомые скорости правого и левого шариков. Наконец, из закона сохранения импульса следует

$$m_1 v_1' = m_2 v_2'.$$

Решая систему полученных уравнений, найдем

$$v_1' = \frac{v_1^2}{\sqrt{v_1^2 + v_2^2}}, \quad v_2' = \frac{v_2^2}{\sqrt{v_1^2 + v_2^2}}.$$

4. Пусть  $V$  – начальный объем шарика. Тогда  $4V$  – объем сосуда, а  $2V$  – конечный объем шарика. Запишем уравнения Менделеева–Клапейрона для состояния идеального газа внутри шарика:

$$p_1 V = \nu_1 R T,$$

вне шарика:

$$p_2 (4V - V) = \nu_2 R T,$$

а также для состояния этих газов непосредственно перед тем как шарик лопнул:

$$p_1' (2V) = \nu_1 R T', \quad p_2' (4V - 2V) = \nu_2 R T'.$$

Здесь  $\nu_1, \nu_2$  – количества молей газов внутри и снаружи шарика соответственно,  $T'$  – конечная (критическая) температура,  $p_1'$  и  $p_2'$  – давления газов внутри и снаружи шарика, которые связаны соотношением

$$p_1' = p_2' + \Delta p.$$

Теперь запишем уравнение Менделеева–Клапейрона для смеси этих двух газов в конечном состоянии:

$$p(4V) = (\nu_1 + \nu_2) R T',$$

где  $p$  – искомое давление в сосуде. Из полученных выражений найдем

$$p = \frac{\Delta p}{2} \frac{p_1 + 3p_2}{p_1 - 3p_2}.$$

5. В процессе вытягивания на шар действуют сила тяжести, сила натяжения нити и сила реакции со стороны стола, направленная вдоль линии  $OO'$ , соединяющей центр скругления стола и центр шара (рис.61). Поскольку шар вытягивают медленно, он в каждый момент времени находится в равновесии, поэтому сумма сил, действующих на него, равна нулю:

$$N + Mg \cos \alpha = T \cos \beta,$$

$$Mg \sin \alpha = T \sin \beta.$$

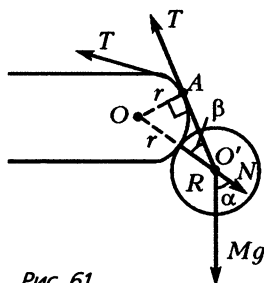


Рис. 61

Из прямоугольного треугольника  $OO'A$

$$\sin \beta = \frac{r}{r+R}.$$

Отсюда находим

$$T = Mg \frac{r+R}{r} \sin \alpha.$$

Видно, что максимальному значению  $T$  соответствует  $\sin \alpha = 1$ :

$$T_{\max} = Mg \frac{r+R}{r}.$$

11 класс

2. Пусть  $C_1$  – емкость конденсатора в схеме,  $C_2$  – емкость конденсатора, присоединяемого к схеме, а  $U_0$  – начальное показание вольтметра. После присоединения к схеме незаряженного конденсатора заряд  $C_1 U_0$  перераспределяется между двумя конденсаторами. При этом напряжения на конденсаторах равны и соответствуют новому показанию вольтметра  $U_1$ . Из закона сохранения заряда следует

$$C_1 U_0 = C_1 U_1 + C_2 U_1.$$

Повторение процедуры приводит к новому показанию вольтметра  $U_2$ , причем

$$C_1 U_1 = C_1 U_2 + C_2 U_2.$$

Отсюда найдем

$$U_2 = \frac{U_1^2}{U_0} = 4 \text{ В}.$$

3. При заливе воды можно выделить три состояния, изображенные на рисунке 62. При переходе  $a) \rightarrow б)$  воздух в левой и средней цистернах изотермически сжимался, поэтому

$$p_0 (2V) = p \left( V + \frac{V}{2} \right),$$

где  $p_0$  – атмосферное давление,  $V$  – объем одной цистерны,  $p$  – давление сжатого воздуха в состоянии  $б)$ . При переходе  $б) \rightarrow в)$  воздух в левой и средней цистернах независимо изотермически сжимался. По-

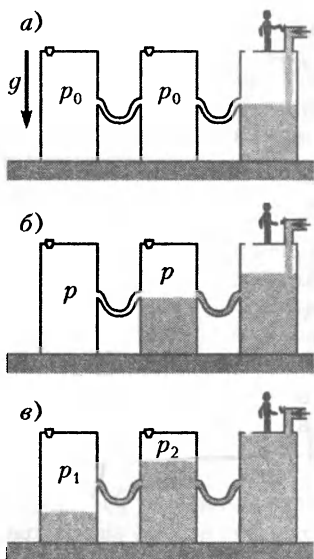


Рис. 62

этому для воздуха в левой цистерне

$$pV = p_1 \left( 1 - \frac{3}{11} \right) V,$$

а в средней цистерне

$$p \frac{V}{2} = p_2 (1 - x) V,$$

где  $x$  – искомая доля объема средней цистерны, заполненного водой. В состоянии равновесия  $\vartheta$ ) давления на концах шлангов равны между собой:

$$p_1 = p_2 + \rho g \left( x - \frac{1}{2} \right) H = p_0 + \rho g \frac{H}{2},$$

где  $H$  – высота цистерн,  $\rho$  – плотность воды. Отсюда получаем квадратное относительно  $x$  уравнение

$$5x^2 - 13x + 6 = 0,$$

которое имеет два решения:  $x = 3/5$  и  $x = 2$ . Второе решение, очевидно, не подходит.

4. Искомая энергия  $E$  тратится на подъем воды на высоту  $h$  и на разгон ее до скорости  $v$ , с которой вода выходит из шланга:

$$E = Mgh + \frac{Mv^2}{2}.$$

Найдем скорость  $v$ . Вертикальная составляющая этой скорости  $v_v$  равна  $gt$ , а горизонтальная  $v_r$  равна  $d/t$ , где  $t$  – время пролета от шланга до верхней точки струи. Найдем  $t$ :

$$\frac{gt^2}{2} = H - h, \text{ или } t = \sqrt{\frac{2(H - h)}{g}}.$$

Отсюда получаем

$$v_v = gt = \sqrt{2g(H - h)},$$

$$v_r = \frac{d}{t} = d \sqrt{\frac{g}{2(H - h)}},$$

$$v^2 = v_v^2 + v_r^2 = 2g(H - h) + \frac{gd^2}{2(H - h)}$$

и

$$E = Mgh + \frac{M}{2} \left( 2g(H - h) + \frac{gd^2}{2(H - h)} \right) = Mg \left( H + \frac{d^2}{4(H - h)} \right).$$

5. Сила, с которой спортсмен натягивает тетиву, изменяется от 0 (когда лук не натянут) до максимального значения  $F$  (когда лук полностью натянут). При этом спортсмен затрачивает энергию

$$W = \frac{F}{2} x ,$$

где  $x$  – расстояние, на которое стрелок оттягивает тетиву, примерно равное длине стрелы. Эта энергия переходит в кинетическую энергию стрелы

$$W = \frac{mv^2}{2} ,$$

где  $m$  – масса стрелы,  $v$  – искомая скорость. Отсюда найдем

$$v = \sqrt{\frac{Fx}{m}} .$$

Подставив численные значения  $F = 200$  Н,  $x = 0,7$  м,  $m = 0,02$  кг, получим  $v \approx 80$  м/с .

6. Крупинка отрывается от поверхности линейки в тот момент, когда ускорение  $a$  участка линейки под ней становится равным ускорению свободного падения  $g$ . Таким образом, условие того, что крупинка останется лежать на линейке, имеет вид

$$a_m < g ,$$

где  $a_m$  – максимальное значение (в процессе колебаний) ускорения участка линейки под крупинкой. На той части линейки, где это условие выполнено, крупа остается на месте. Там же, где условие нарушается, крупинки «подпрыгивают», отрываясь от линейки, и через некоторое число периодов колебаний покидают линейку. Рассмотрим, как  $a_m$  меняется вдоль линейки. Каждая точка линейки совершает синусоидальные колебания

$$y(t) = A \sin \omega t ,$$

где  $y$  – отклонение по вертикали от равновесного положения линейки,  $t$  – время,  $A$  – амплитуда (разная для разных точек линейки),  $\omega = 2\pi/T$  – частота (одна и та же для всей линейки,  $T$  – период колебаний). Отсюда видно, что колебания разных точек линейки *подобны* – единственное различие между ними состоит в разной величине множителя  $A$ . Поэтому и скорости разных точек линейки (производные  $y$  по времени  $t$ ), и их ускорения (вторые производные  $y$  по  $t$ ) будут отличаться друг от друга только значением множителя  $A$ . Следовательно, максимальная скорость  $v_m$  и максимальное ускорение  $a_m$  в каждой точке

линейки пропорциональны амплитуде  $A$  колебаний этой точки:

$$v_m \sim A, \quad a_m \sim A.$$

Направим ось  $x$  вдоль линейки, выбрав начало отсчета в месте ее закрепления. Амплитуда колебаний  $A$  увеличивается с ростом  $x$ , как показано на рисунке 63 сплошной линией. Зависимости  $v_m$  и  $a_m$  от координаты  $x$  можно изобразить этой же линией при подходящем выборе масштабов скорости и ускорения на графике. Проведя горизонтальную черту, соответствующую ускорению  $g$ , можно убедиться, что

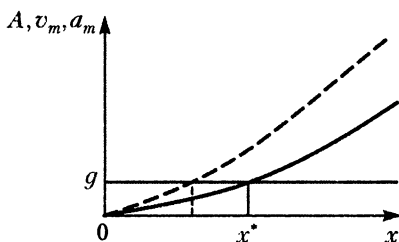


Рис. 63

$$a_m < g \text{ при } x < x^* \text{ и } a_m > g \text{ при } x > x^*,$$

где  $x^*$  — значение координаты  $x$ , при котором  $a_m = g$ . Иными словами,  $x^*$  задает границу, с одной стороны от которой крупа падает с линейки, а с другой остается лежать на линейке. Также из графика видно, что при большем размахе колебаний линейки (пунктирная линия на графике) граница  $x^*$  смещается ближе к месту закрепления линейки.

## РОССИЙСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ НЕФТИ И ГАЗА ИМЕНИ И.М.ГУБКИНА

### ФИЗИКА

#### Письменный экзамен

#### Вариант 1

|                                 |                      |                       |                     |                       |                      |
|---------------------------------|----------------------|-----------------------|---------------------|-----------------------|----------------------|
| <b>B1</b><br>5 м/с <sup>2</sup> | <b>B2</b><br>1600 км | <b>B3</b><br>150 см/с | <b>B4</b><br>10 см  | <b>B5</b><br>15 м     | <b>B6</b><br>1200    |
| <b>B7</b><br>80 К               | <b>B8</b><br>10 Н    | <b>B9</b><br>33 кДж   | <b>B10</b><br>6 мТл | <b>B11</b><br>750 м/с | <b>B12</b><br>600 нм |
| <b>C1</b><br>30 Н               | <b>C2</b><br>5 м/с   | <b>C3</b><br>9960 Дж  | <b>C4</b><br>450 В  |                       |                      |

#### Вариант 2

|                   |                |                     |                     |                    |                |
|-------------------|----------------|---------------------|---------------------|--------------------|----------------|
| <b>B1</b><br>50 м | <b>B2</b><br>9 | <b>B3</b><br>30 м/с | <b>B4</b><br>960 Дж | <b>B5</b><br>450 Н | <b>B6</b><br>6 |
|-------------------|----------------|---------------------|---------------------|--------------------|----------------|

|           |                    |           |                    |            |            |
|-----------|--------------------|-----------|--------------------|------------|------------|
| <b>В7</b> | <b>В8</b>          | <b>В9</b> | <b>В10</b>         | <b>В11</b> | <b>В12</b> |
| 270 К     | 5 м/с <sup>2</sup> | 42 Дж     | 6 Тл               | 750 м/с    | 400        |
| <b>С1</b> | <b>С2</b>          | <b>С3</b> | <b>С4</b>          |            |            |
| 250 Н     | 72%                | 415 Дж    | 15 см <sup>2</sup> |            |            |

*Вариант 3*

|                    |           |           |            |            |            |
|--------------------|-----------|-----------|------------|------------|------------|
| <b>В1</b>          | <b>В2</b> | <b>В3</b> | <b>В4</b>  | <b>В5</b>  | <b>В6</b>  |
| 2                  | 40%       | 60 см/с   | 20 м       | 884 см     | 42 г       |
| <b>В7</b>          | <b>В8</b> | <b>В9</b> | <b>В10</b> | <b>В11</b> | <b>В12</b> |
| 80 К               | 105 В/м   | 5         | 9 Тл       | 800        | 375 нм     |
| <b>С1</b>          | <b>С2</b> | <b>С3</b> | <b>С4</b>  |            |            |
| 6 м/с <sup>2</sup> | 30 м/с    | 3984 Дж   | 16         |            |            |

## **САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ**

*Политехническая олимпиада школьников*

**МАТЕМАТИКА**

*Отборочный тур*

1. 7420. 2. 49. 3. 32. 4. -5. 5. -4. 6. -0,25. 7. 15. 8. 9. 9. 3.  
10. 1.

*Заключительный тур*

1. (2, 4). 2. 31. 3. -2. 4. 1210. 5. (1; 2), (2/3; 3/2). 6.  $-1/\sqrt{2}$ .  
7.  $\{\pi/4 + 2\pi k; k \in \mathbb{Z}\}$ . 8. 20. 9.  $3\sqrt{2}/5$ . 10. 11/16.

**ФИЗИКА**

*Отборочный тур*

$$1. t = \frac{v \sin \alpha}{g} + \frac{v^2}{2gv_{3B}} \sqrt{\sin^4 \alpha + \sin^2 2\alpha} = 115 \text{ с.}$$

$$2. \Delta s = \frac{(3k^2 + 2k - 1)}{(k + 1)^2} \frac{v^2}{2\mu g} = 46 \text{ м.}$$

$$3. \rho_{ж} = \rho_{в} \frac{(k - n)}{(1 - n)} = 732 \text{ кг/м}^3.$$

$$4. \frac{p_{He}}{p_{Ar}} = \frac{v_{He}}{v_{Ar}} = 3,6. \quad 5. A = A_T - \frac{5}{2} vRT \frac{n-1}{n} = 4,9 \text{ кДж.}$$

$$6. r = \sqrt{R_1 R_2} = 66 \text{ Ом} . \quad 7. v_k = \sqrt{\frac{2eEs}{m} + v_0^2} = 43 \text{ км/с} .$$

$$8. R = \frac{Ba^2}{16q} (9 - 4\sqrt{3}) = 4366 \text{ Ом} . \quad 9. \Delta d = \frac{2}{\Gamma D} = 37 \text{ мм} .$$

$$10. q = \frac{\epsilon_0 \epsilon S}{d} \frac{\frac{hc}{\lambda} - A}{e} = 13 \text{ пКл} .$$

*Заключительный тур*

$$1. t = \frac{2v_0}{g \cos \alpha} \approx 27,7 \text{ с} . \quad 2. \theta = \arccos \sqrt{1 - \eta} = 30^\circ .$$

$$3. T = (n + 1) \frac{T_1 T_2}{T_1 + n T_2} \approx 538 \text{ К} .$$

$$4. I_A = \frac{33}{4} \frac{U_V}{R_{\text{общ}}} \approx 6 \text{ А} .$$

$$5. v = \frac{v_0 E}{\sqrt{E^2 + (v_0 B)^2}} .$$

$$6. D = -\frac{1}{d} + \frac{1}{f} = -\frac{1}{f+l} + \frac{1}{f} = 15 \text{ дптр (см. рис.64)} .$$

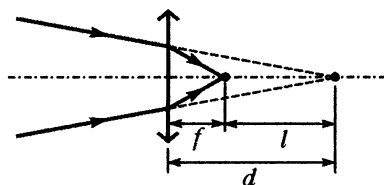


Рис. 64

## ИНФОРМАТИКА

*Отборочный тур*

1. 16.

2. 206.

3. 1-7, 2-5, 3-1, 4-8, 5-3, 6-6, 7-10, 8-2, 9-4, 10-9.

4. 9.

5. Раз - 2, Два - 55, Три - 32, Четыре - 14, Пять - 1, Шесть - 525.

6. 8640. 7. Соломон Соломонович Шеннон.

8. b, d. 9. 13. 10. Сытый на полке -3.

*Заключительный тур*

1. 2.

2. 3N - 1.

3. 20.

4. ЧКАЛОВСКАЯ.

5. А И В, Д ИЛИ (В И НЕ А)...

6. n = 10 x = 108.



Приложение к журналу «Квант» №5-6/2014

Экзаменационные материалы  
по математике и физике 2014 года

Составители *С.А.Дориченко, А.А.Егоров, В.А.Тихомирова*

Редакторы *Е.М.Епифанов, А.Ю.Котова, В.А.Тихомирова*

Обложка *А.Е.Пацхверия*

Макет и компьютерная верстка *Е.В.Морозова*

Компьютерная группа *М.Н.Грицук, Е.А.Митченко*

Формат 84×108 1/32. Бум. офсетная. Гарнитура кудряшевская

Печать офсетная. Объем 8,5 печ.л. Тираж: 1-й завод 900 экз.

Заказ № 16235

119296 Москва, Ленинский пр., 64-А, «Квант»

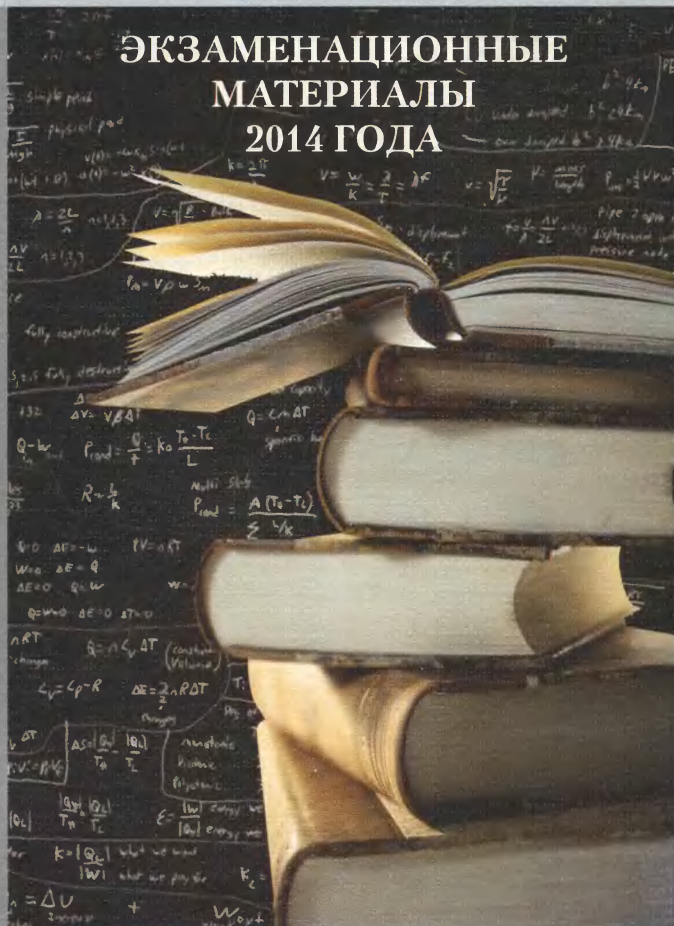
Тел.: (495)930-56-48, e-mail: [math@kvant.ras.ru](mailto:math@kvant.ras.ru), [phys@kvant.ras.ru](mailto:phys@kvant.ras.ru)

Отпечатано «ТДДС-СТОЛИЦА-8»

Тел.: 8(495)363-48-86, <http://capitalpress.ru>



# ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЕ МАТЕРИАЛЫ 2014 ГОДА



ПРИЛОЖЕНИЕ К ЖУРНАЛУ КВАНТ

№5-6/2014